I. megoldás. Feltételezzük, hogy a felosztás véges sok paralelogrammából áll. A nyolcszög bármely két párhuzamos oldalára igaz, hogy paralelogrammák sorozata köti őket össze. Az egymásra merőleges oldalpárokat összekötő sorozatok egy paralelogrammában „metszik” egymást. Megmutatjuk, hogy ez a paralelogramma téglalap.

Válasszuk ki a nyolcszög két szemközti oldalát, legyenek ezek a és b. Legyen P_1 egy olyan paralelogramma a felosztásból, amelynek valamely a_1 oldala illeszkedik az a oldalra. P_1-nek ezzel szemközti oldalát jelölje b_1. Kell lennie olyan P_2 paralelogrammának is, amelynek egyik a_2-vel jelölt oldala olyan, hogy a_2-nek és b_1-nek a metszete egy s_1 szakasz. P_2-nek az a_2-vel szemben lévő oldalát b_2-vel jelölve megállapíthatjuk, hogy b_2 közelebb van a b oldal egyeneséhez, mint b_1. Folytassuk ezt az eljárást, amíg csak lehet.

Ilyen módon különböző paralelogrammáknak olyan $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sorozatához jutunk, hogy minden i-re a P_i paralelogramma b_i oldalának és a P_{i+1} paralelogramma a_{i+1} oldalának közös része egy nem elfajuló s_i szakasz, ami párhuzamos az a, b oldalakkal. Ha ezt a sorozatot már nem tudjuk folytatni (márpedig egy idő után nem tudjuk, hiszen csak véges sok, a felosztásban szereplő paralelogramma közül választhatunk) az csak úgy lehet, hogy az utolsó paralelogramma b_m oldala illeszkedik a nyolcszög b oldalára. Az $s_0 = a_1$, $s_m = b_m$ jelöléseket bevezetve, legyen $i = 0, 1, \ldots, m$ esetén F_i az s_i szakasz felezőpontja. Ekkor az $s = F_0F_1 \ldots F_m$ töröttvonal összeköti a nyolcszög a és b oldalának egy-egy pontját úgy, hogy az $F_{i-1}F_i$ szakasz a végpontjaitól eltekintve végig a P_i paralelogramma belsejében halad.

Legyen c és d a nyolcszögnek a-ra és b-re merőleges oldalpárja, és tekintsünk az előbbiek mintájára egy $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ paralelogramma-sorozatot, ahol most a Q_i megfelelő oldalait c_i és d_i jelöli, c_{i+1} és d_i metszete a G_i felezőpontú t_i szakasz, és a $t = G_0G_1 \ldots G_n$ töröttvonal összeköti a nyolcszög c és d oldalának egy-egy pontját úgy, hogy a $G_{i-1}G_i$ szakasz a végpontjaitól eltekintve végig a Q_i paralelogramma belsejében halad.

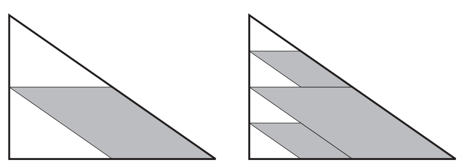
A konstrukcióból adódik, hogy az s és t töröttvonalak a nyolcszög belsejében, egy X pontban metszik egymást. Az s_i és t_j szakaszok nem metszhetik egymást, különben a P_i és Q_j paralelogrammák egymásba nyúlóak lennének. Ezért X a $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ paralelogrammák közül valamelyiknek belső pontja; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy X a P_i belsejében helyezkedik el. Mivel egyben valamelyik Q_j-nek is pontja, és a paralelogrammák nem nyúlnak egymásba, ez csak úgy lehetséges, ha P_i megegyezik Q_j-vel. Ekkor azonban $P_i = Q_j$ olyan paralelogramma, melynek oldalai rendre az a, c, b, d szakaszokkal párhuzamosak. A felosztásban szereplő P_i paralelogramma tehát téglalap.

() *Bereczki Péter* (Szeged, Ságvári Gimn., 9. évf.) és *Tóth János* (Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimn., 12. évf.) megoldása alapján

Megjegyzések. 1. Természetesen van még legalább egy másik téglalap is a felbontásban, hiszen a nyolcszög megmaradt négy oldalára is alkalmazható a megoldás gondolatmenete.

2. Ha a paralelogrammák száma nem véges, akkor a feladat állítása nem igaz:

Daraboljuk fel ehhez háromszögekre a nyolcszöget. Minden ilyen háromszögbe írjunk az ábra szerint paralelogrammákat.



Ekkor – az eljárást a végtelenségig folytatva – a nyolcszöget olyan paralelogrammákra oszthatjuk fel, amelyek nyilvánvalóan nem téglalapok.

II. megoldás. A megoldás során összeszámoljuk a paralelogrammák hegyesszögű, valamint tompaszögű csúcsait. Azt tapasztaljuk, hogy ha nincsenek derékszögű csúcsok, akkor több hegyesszögű csúcs van, mint tompaszögű; ez nyilván ellentmondás, hiszen minden egyes paralelogrammának azonos számú hegyesszögű és tompaszögű csúcsa van.

A felbontásban szereplő bármely paralelogramma-oldal párhuzamos a nyolcszög valamelyik oldalával. Tetszőleges oldalból kiindulva lépjünk a paralelogramma szemben levő oldalára, majd a továbbira. Így a párhuzamos oldalak egymásutánját kapjuk, amelynek utolsó eleme a nyolcszög valamelyik oldala.

Tegyük fel, hogy a paralelogrammák között nincs téglalap. Ekkor csak kétféle szöge lehet a paralelogrammáknak: 45° vagy 135°. Így minden paralelogrammának két 45°-os hegyes- és két 135°-os tompaszöge van.

Számoljuk össze paralelogramma-csúcsonként, hogy az egyes szögekből mennyit találunk.

I.) a nyolcszög belső pontjaiban:

1.) 8 hegyes, vagy

2.) 5 hegyes, 1 tompa, vagy

3.) 2 hegyes, 2 tompa.

Ezért minden belső csúcsban legalább annyi hegyesszög van, mint tompa.

II.) a nyolcszög határán lévő csúcsokban a különböző tulajdonságú szögeket paralelogrammánként számoljuk össze aszerint, hogy a paralelogramma és a nyolcszög határának közös része

4.) a paralelogramma egy teljes oldala: 1 hegyes, 1 tompa;

5.) a paralelogramma két teljes szemközti oldala: 2 hegyes, 2 tompa;

6.) a paralelogramma két teljes szomszédos oldala (ekkor van közös csúcsuk is): 2 hegyes, 1 tompa;

7.) a paralelogramma egyik csúcsa: 1 hegyes, hiszen tompaszög esetén e csúcs körül még két szögtartomány keletkezik, amelyek mindegyike kisebb, mint 45°, ezért nem lenne lefedhető.

Látható, hogy mindegyik esetben legalább annyi hegyesszög van, mint tompaszög, és ha a nyolcszög egy csúcsánál a 6., vagy a 7. eset valósul meg, akkor biztosan több hegyesszög keletkezik, mint tompa. Nem valósulhat meg minden csúcsnál a 4. eset, hiszen két, a nyolcszög egy-egy oldalához támaszkodó 45°-os szög között marad egy ugyancsak 45°-os szögtartomány, ami csak a 7. esethez tartozó módon fedhető le.

Összesen tehát több hegyesszög lesz, mint tompaszög, ami ellentmondás, hiszen a számuk egyenlő.

() *Pallos Péter* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.) megoldása alapján