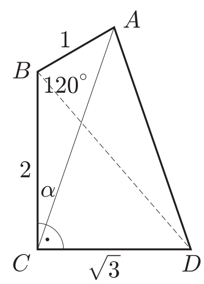
I. megoldás. Helyezzük el az $ABCD$ négyszöget a derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy a CD szakasz az x tengelyen legyen, a C pont pedig az origóban. Ekkor a B és D pontok koordinátái: $B(0;2)$, $D\left(\sqrt{3};0\right)$. Az A pont vetülete az y tengelyen A'. Mivel $ABA'\sphericalangle = 60°$, az ABA' háromszögből $AA' = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BA' = \cos 60° = \frac{1}{2}$ és így az A pont koordinátái: $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right)$. Az AD szakasz hossza:

$$AD = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}.$$

() *Kocsis István* (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)



II. megoldás. Az ABC háromszögből a koszinusztétel alkalmazásával meghatározhatjuk az AC átló hosszát:

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120°.$$

Innen $AC = \sqrt{7}$. A BCD derékszögű háromszögben $DB^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$, innen $DB = \sqrt{7}$. Jelölje a BCA szöget α. A CAB háromszögben ugyancsak a koszinusztétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{7}\right)^2 + 2^2 - 1}{2 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

Végül az ADC háromszögből, ugyancsak a koszinusztétel alkalmazásával, megkapjuk a keresett AD oldal hosszát:

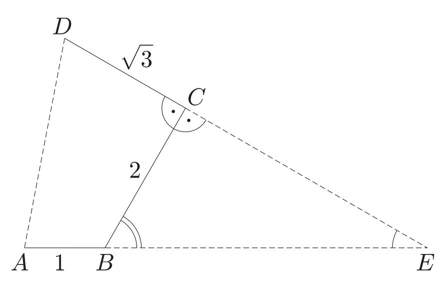
$$AD^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(90° - \alpha). \tag{1}$$

Tudjuk, hogy $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, a négyzetes összefüggésből $\cos\alpha$ ismeretében kiszámíthatjuk $\sin\alpha$ értékét, felhasználva, hogy $\alpha < 90°$:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{196}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{14},$$

ezt helyettesítve (1)-be, rendezés után kapjuk, hogy $AD = \sqrt{7}$.

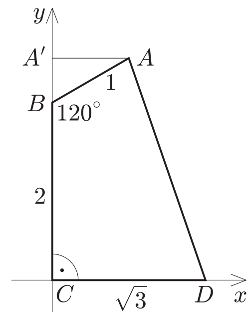
III. megoldás. Hosszabbítsuk meg az AB és a CD oldalakat, az így kapott félegyenesek metszéspontja legyen E.



A BCE derékszögű háromszögben $CBE\sphericalangle = 60°$, így $BEC\sphericalangle = 30°$, $BE = 2BC = 4$, $CE = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}$. Az AEB háromszögben $AE = 5$, $DE = 3\sqrt{3}$, $AED\sphericalangle = 30°$. A koszinusztételt fölírva

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE \cdot DE \cdot \cos AED\sphericalangle = 25 + 27 - 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,$$

tehát $AD = \sqrt{7}$.



y
A'
A
1
B
120°
2
C
√3
D
x