Megoldás. Legyen ε_1 és ε_2 az x^2+x+1 polinom két komplex gyöke; ezek nem mások, mint az 1-től különböző harmadik egységgyökök. A polinom gyöktényezős alakja $(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$, ezért a binomiális tétel alapján

$$\begin{gathered}(x^2+x+1)^p=(x-\varepsilon_1)^p(x-\varepsilon_2)^p=\\ =\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\varepsilon_1^k x^{p-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\varepsilon_2^k x^{p-k}\right).\end{gathered}$$

A polinomban az x^p együtthatója:

$$\begin{aligned}a_p&=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\varepsilon_1^k\cdot(-1)^{p-k}\binom{p}{p-k}\varepsilon_2^{p-k}=-\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{p}{k}^2(\varepsilon_1^{p-2k}+\varepsilon_2^{p-2k})=\\ &=-(\varepsilon_1^p+\varepsilon_2^p)-\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{p}{k}^2(\varepsilon_1^{p-2k}+\varepsilon_2^{p-2k}).\end{aligned}$$

Tetszőleges u egész számra $\varepsilon_1^u+\varepsilon_2^u=2$, ha u osztható 3-mal, és $\varepsilon_1^u+\varepsilon_2^u=-1$, ha u nem osztható 3-mal. Mivel p nem osztható 3-mal, $\varepsilon_1^p+\varepsilon_2^p=-1$. A $\binom{p}{k}$ binomiális együttható pedig $0<k<p$ esetén mindig osztható p-vel. Ezért $a_p\equiv-(\varepsilon_1^p+\varepsilon_2^p)=1 \pmod{p^2}$.

()

Több dolgozat alapján