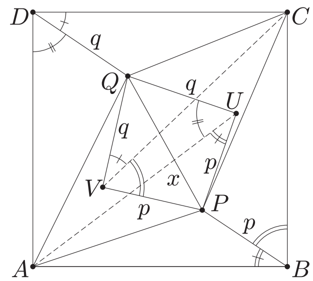
Megoldás. Legyen $BP = p$, $DQ = q$ és $PQ = x$. A p és q hosszúságokkal kell kifejeznünk x-et.

A P és Q pontok közül az egyik az ABC, a másik az ACD háromszög belsejébe esik. Ennek megfelelően két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. Ha a P pont az ABC háromszög, a Q pont pedig az ACD háromszög belsejébe esik, akkor az APQ és a CQP háromszög is az $ABCD$ négyzettel azonos körüljárású.

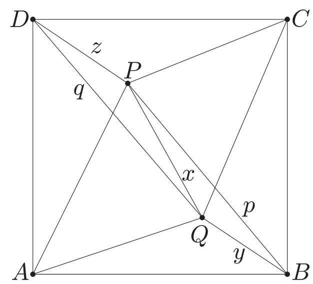


Tükrözzük a B pontot az AP és a CP egyenesekre; a két tükörkép legyen U, illetve V. A tükrözés miatt $AU = AB = AD$, és az A csúcsnál fekvő szögek összeszámolásából kapjuk, hogy $QAU\sphericalangle = DAQ\sphericalangle$. Ebből következik, hogy az AQU és AQD háromszögek egybevágók. Hasonlóan kapjuk, hogy a CQV és CQD háromszögek is egybevágók.

Az egybevágóságok miatt az *ábrán* azonosan jelölt szögek egyenlők, $PU = PV = PB = p$ és $QU = QV = QD = q$. A PQU és PQV háromszögek egybevágók, mert oldalaik ugyanakkorák. Ezért az U-nál és V-nél fekvő szögeik egyenlőek. Ennek a két szögnek az összege megegyezik az $ABCD$ négyzet B-nél és D-nél levő szögeinek összegével, tehát $PUQ\sphericalangle = PVQ\sphericalangle = 90°$. A Pitagorasz-tételből tehát $x = \sqrt{p^2 + q^2}$.

A gondolatmenetből az is következik, hogy $ABP\sphericalangle = CDQ\sphericalangle$, és a BP szakasz párhuzamos a QD szakasszal.

2. Ha a Q pont az ABC háromszög, a P pont pedig az ACD háromszög belsejébe esik, az APQ háromszög és a CQP háromszög is az $ABCD$ négyzettel ellentétes körüljárású. Ebben az esetben a megoldás (és a végeredmény is) lényegesen bonyolultabb.

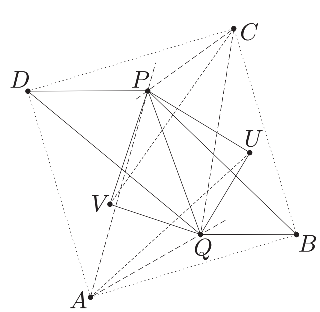


Mint láttuk, a $QBPD$ négyszög trapéz, alapjai QB és PD, továbbá $PQ^2 = BQ^2 + DP^2$. A pontok elhelyezkedéséből azt is megállapíthatjuk, hogy $BP > DP$ és $BQ < DQ$.

Először megmutatjuk, hogy minden ilyen tulajdonságú trapézhoz találhatók olyan A és C pontok, amelyekre $ABCD$ négyzet és $PAQ\sphericalangle = PCQ\sphericalangle = 45°$.

Legyen tehát $QBPD$ egy olyan trapéz, amelyben $PQ^2 = BQ^2 + DP^2$. Legyen U és V az a két pont, amelyre $QU = QV = BQ$ és $PU = PV = DP$; az U pont a PQ átlónak a B-vel megegyező oldalán legyen, a V pont pedig a D csúccsal megegyező oldalon. A Pitagorasz-tétel megfordítása szerint $PUQ\sphericalangle = PVQ\sphericalangle = 90°$.

Legyen A a BQU szög és a DPU szög felezőjének metszéspontja és legyen C a BQV szög felezőjének és a DPV szög felezőjének metszéspontja.



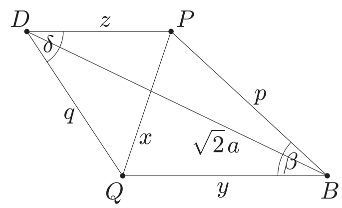
Az AB, AU és AD szakaszok egyenlő hosszúságúak, mert szimmetrikusak az AQ, illetve AP egyenesekre. Hasonlóképpen $CB = CV = CD$, mert ez a három szakasz is szimmetrikus a CQ, illetve CP egyenesekre. A $PAQU$ és $PVQC$ négyszögek szögeinek összeszámolásából kapjuk, hogy $PAQ\sphericalangle = PCQ\sphericalangle = 45°$ és így $BAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 90°$. Mindezekből következik, hogy az $ABCD$ négyszög egy négyzet.

A $BP > DP$ és $BQ < DQ$ feltételek biztosítják, hogy az U és a V pont a PQB, illetve a QPD szögtartomány belsejébe esik, az A és C pontok a PQ egyenesnek a D-vel, illetve B-vel megegyező oldalán vannak és az $ABCD$ négyzet valóban a belsejében tartalmazza a PQ szakaszt.

Jelöljük a négyzet oldalának hosszát a-val, továbbá legyen $BQ = y$ és $PD = z$. Az a, p, q szakaszok hosszával fogjuk kifejezni x-t, y-t és z-t. A pontok elhelyezkedéséből látható, hogy $\frac{1}{\sqrt{2}}a < p, q < \sqrt{2}a$.

Mint már láttuk,

$$x^2 = y^2 + z^2. \tag{1}$$



Tekintsük a $QBPD$ trapézt. Legyen $QBP\sphericalangle = \beta$ és $PDQ\sphericalangle = \delta$. Írjuk fel a koszinusz-tételt a QBP, BPD, PDQ és DQB háromszögekre:

$$\begin{aligned} x^2 &= p^2 + y^2 - 2py\cos\beta \\ 2a^2 &= p^2 + z^2 + 2pz\cos\beta \\ x^2 &= q^2 + z^2 - 2qz\cos\delta \\ 2a^2 &= q^2 + y^2 + 2qy\cos\delta. \end{aligned}$$

A koszinuszokat eliminálva:

$$x^2z + 2a^2y = (p^2 + yz)(y + z), \tag{2}$$

$$x^2y + 2a^2z = (q^2 + yz)(y + z). \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletek összegét $(y + z)$-vel osztva egy minden trapézban érvényes összefüggést kapunk:

$$x^2 + 2a^2 = p^2 + q^2 + 2yz,$$

amiből (1) alapján

$$(y - z)^2 = y^2 - 2yz + z^2 = x^2 - 2yz = p^2 + q^2 - 2a^2 \tag{4}$$

és

$$(y + z)^2 = y^2 + 2yz + z^2 = x^2 + 2yz = 2x^2 + 2a^2 - p^2 - q^2.$$

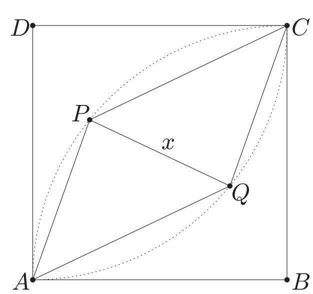
A (2) és (3) egyenletek különbségét négyzetre emelve és behelyettesítve $(y - z)^2$, illetve $(y + z)^2$ értékét:

$$(2a^2 - x^2)^2(y - z)^2 = (p^2 - q^2)^2(y + z)^2,$$

$$(2a^2 - x^2)^2(p^2 + q^2 - 2a^2) = (p^2 - q^2)^2(2x^2 + 2a^2 - p^2 - q^2),$$

$$\begin{gathered} (p^2 + q^2 - 2a^2)(2a^2 - x^2)^2 + 2(p^2 - q^2)^2(2a^2 - x^2)- \\ -(p^2 - q^2)^2(6a^2 - p^2 - q^2) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

A $2a^2 - x^2$ számot ebből a (legfeljebb) másodfokú egyenletből fogjuk kiszámítani. A (4) egyenletből látható, hogy a főegyüttható nemnegatív: $p^2 + q^2 - 2a^2 = (y - z)^2 \geq 0$.



Ha a főegyüttható 0, azaz

$$p^2 + q^2 - 2a^2 = (y - z)^2 = 0,$$

akkor $y = z$, a $QBPD$ trapéz paralelogramma és $p = q = a$. Könnyű végiggondolni, hogy ha P és Q a B, illetve D középpontú, a sugarú körön, a négyzet középpontjára szimmetrikusan helyezkedik el, akkor a $PAQ\sphericalangle = PCQ\sphericalangle = 45^\circ$ biztosan teljesül. A PQ szakasz hosszáról ilyenkor nem mondhatunk többet, mint hogy a $\left[\left(2-\sqrt{2}\right)a, \sqrt{2}a\right)$ intervallumba esik.

Ha a főegyüttható pozitív, akkor az (5) egyenletben a főegyüttható és a konstans tag ellentétes előjelű, ezért egy pozitív és egy negatív gyöke van. Mivel $x < \sqrt{2}a$, nekünk a pozitív gyökre van szükségünk:

$$\begin{aligned}
&2a^2 - x^2 = \\
&= \frac{-\left(p^2-q^2\right)^2 + \sqrt{\left(p^2-q^2\right)^4 + (p^2+q^2-2a^2)\left(p^2-q^2\right)^2(6a^2-p^2-q^2)}}{p^2+q^2-2a^2} = \\
&= \frac{-\left(p^2-q^2\right)^2 + 2|p^2-q^2|\sqrt{-3a^4+2a^2(p^2+q^2)-p^2q^2}}{p^2+q^2-2a^2}, \\
x &= \sqrt{2a^2 + \frac{\left(p^2-q^2\right)^2 - 2|p^2-q^2|\sqrt{-3a^4+2a^2(p^2+q^2)-p^2q^2}}{p^2+q^2-2a^2}}.
\end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük.