Megoldás. Ismerünk olyan számokat, amelyekben egyes számjegyek „blokkokban” szerepelnek és a négyzeteikben is vannak olyan számjegyek, amelyek szintén „blokkokban” fordulnak elő. Ezek jobbára olyanok, amelyekben a 3-as, a 6-os vagy a 9-es szerepel. Az az előnye az ilyen számoknak, hogy egyszerűbben számítható ki a számjegyeik összege, mint más számoké. Ezek körében keresünk a feladat feltételeinek eleget tevő számot.

Ha egy szám négyzetében a számjegyek összege 2002, az csak úgy lehet, ha a szám nem osztható 3-mal. Ilyen pl. a $333\ldots 3a$ és a $999\ldots 9b$, ahol a és b lehetséges értékei 1, 2, 4, 5, 7 és 8. Ezek közül csak az $a = 1, 2, 5, 8$, illetve a $b = 2$ és 7 megfelelőek.

Az állítást bebizonyítjuk $a = 2$-re és $b = 7$-re.

Ha $a = 2$, akkor $\underbrace{33\ldots 3}_{k-1}2 = \frac{10^k-1}{3} - 1 = \frac{10^k-4}{3}$. Ennek négyzete

$$\frac{10^{2k} - 8\cdot 10^k + 16}{9} = \frac{10^{2k} - 10\cdot 10^k + 2\cdot 10^k - 2 + 18}{9} =$$
$$= \frac{10^{2k} - 10^{k+1}}{9} + 2\cdot\frac{10^k-1}{9} + 2 = 10^{k+1}\cdot\frac{10^{k-1}-1}{9} + 2\cdot\frac{10^k-1}{9} + 2.$$

Az első tag első $k-1$ jegye 1-es, a további $k+1$ pedig 0. A második tag k darab 2-esből áll. A három tag összege eszerint $k-1$ egyesből, utána egy 0-ból, majd $k-1$ darab 2-esből, végül egy 4-esből áll. A számjegyek összege $3(k-1)+4$, ami $k = 667$ választással éppen 2002.

Ha $b = 7$, akkor $\underbrace{99\ldots 9}_{k-1}7 = 10^k - 3$. Ennek négyzete

$$10^{2k} - 6\cdot 10^k + 9 = (10^k - 6)\cdot 10^k + 9.$$

$10^k - 6$ olyan szám, amelynek első $k-1$ jegye 9-es, utolsó jegye 4-es. Ennek 10^k-szorosa nem változtatja a benne szereplő számjegyek összegét, ami $(k-1)\cdot 9 + 4$; ehhez kell hozzáadni az egyesek helyén álló 9-est. $2002 = (k-1)\cdot 9 + 13$ akkor teljesül, ha $k = 222$.

Megjegyzés. Az $a = 4$ (és hasonlóan a többi „rossz” eset) azért nem megfelelő, mert a $\underbrace{33\ldots 3}_{k}4$ szám négyzetében k darab 1-es, illetve $(k-1)$ 5-ös, valamint egy 6-os szerepel, amelyek összege $k\cdot 6 + 1$, tehát páratlan. A b értékek esetében az a gond, hogy a négyzetszám 9-cel való osztási maradéka 4 kell legyen, így az 1, a 4, az 5 és a 8 eleve kiesnek, ugyanis az ezekkel a számjegyekkel a képzett szám négyzete 9-cel osztva rendre 1, 7, 7, illetve 1 maradékot ad.