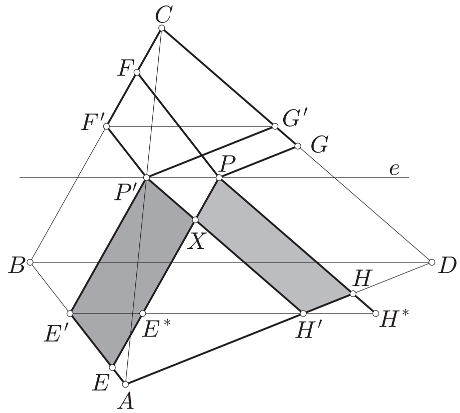
I. megoldás. Tekintsük azt a speciális esetet, amikor a P pont az AC átlón van. Ekkor a kérdéses négyszögek hasonlóak az eredetihez, mivel az egyiket A-ból, a másikat C-ből való kicsinyítéssel kapjuk meg az eredeti négyszögből. Erre az esetre vezetjük vissza az általános esetet úgy, hogy a kérdéses területek ne csökkenjenek.



A P pontot tartalmazó e egyenes legyen párhuzamos a BD átlóval. Jelölje P' az e egyenes és az AC átló metszéspontját.

Származtassuk az E', F', G', H' pontokat a P' pontból pontosan úgy, ahogy az E, F, G, H pontokat származtattuk a P pontból. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy a P pont az ADC háromszög belsejében van.

Jelölje E^* és H^* a PE, illetve a PH egyenesnek az $E'H'$ egyenessel vett metszéspontját, valamint jelölje X a PE és a $P'H'$ egyenesek metszéspontját.

Az $E'H'$ párhuzamos BD-vel, mivel az $AE'P'H'$ és az $ABCD$ négyszög középpontosan hasonló az A pontra nézve, és mivel PP' is párhuzamos BD-vel, így $E'H'$ és PP' egymással is párhuzamosak.

A $CF'P'G'$ és a $CBAD$ négyszög szintén középpontosan hasonló, így $F'G'$ és PP' párhuzamos BD-vel.

A $PP'H'H^*$ és a $PP'E'E^*$ paralelogrammák BD-vel párhuzamos alapjai és az ezekhez tartozó magasságuk is egyenlő, így a területük is.

$t_{PP'H'H^*} = t_{PP'E'E^*}$, amiből a bal oldal csökkentése és a jobb oldal növelése miatt $t_{PP'H'H} \le t_{PP'E'E}$ következik. Ezekből a négyszögekből elhagyva az $PP'X$ háromszöget, a megmaradt trapézok területeire is fennáll az egyenlőtlenség. A trapézok közül a kisebbik területével csökkentettük, míg a nagyobbik területével növeltük az $AEPH$ négyszög területét. Ezért $t_{AEPH} \le t_{AE'P'H'}$. Hasonlóan adódik, hogy $t_{CFPG} \le t_{CF'P'G'}$. A két egyenlőtlenségből gyököt vonva és összeadva őket kapjuk, hogy:

$$\sqrt{t_{AEPH}} + \sqrt{t_{CFPG}} \le \sqrt{t_{AE'P'H'}} + \sqrt{t_{CF'P'G'}}. \tag{1}$$

Mivel az $AE'P'H'$ és az $ABCD$ négyszög középpontosan hasonló az A pontra nézve, így

$$\frac{\sqrt{t_{AE'P'H'}}}{\sqrt{t_{ABCD}}} = \frac{AP'}{AC}.$$

Hasonlóan a $CF'P'G'$ és a $CBAD$ négyszög középpontosan hasonló a C pontra nézve, így

$$\frac{\sqrt{t_{CF'P'G'}}}{\sqrt{t_{ABCD}}} = \frac{CP'}{CA}.$$

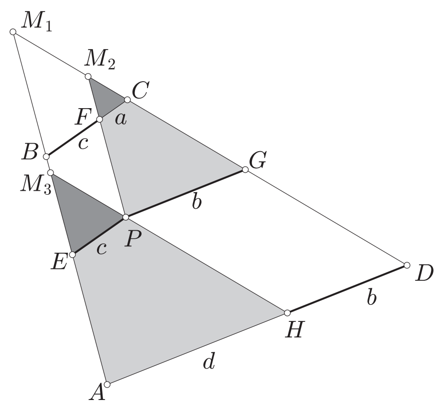
A két egyenlőség összegében a jobb oldalon 1 áll, így a nevezővel történő szorzás után azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{t_{AE'P'H'}} + \sqrt{t_{CF'P'G'}} = \sqrt{t_{ABCD}}. \tag{2}$$

(1) és (2) összevetéséből adódik a bizonyítandó állítás. A megoldásból következik, hogy akkor van egyenlőség, ha P az AC átlóra esik.

() *Salát Máté* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Paralelogramma esetén az állítás egyszerűen bizonyítható. Ha $ABCD$ nem paralelogramma, akkor van két szemben levő oldala, amelynek egyenesei metszik egymást. Legyen pl. az AB és CD a két nem párhuzamos oldalegyenes, jelöljük a metszéspontjukat M_1-gyel, az FP és CD egyenesek metszéspontját M_2-vel és a HP és AB egyenesek metszéspontját M_3-mal. Tekintsük azt az esetet, amikor a BC egyenes elválasztja AD-t az M_1 ponttól.



Ekkor a BM_1C, FM_2C, EM_3P háromszögek hasonlóak, hiszen oldalaik párhuzamosak. A BC oldalhoz, illetve megfelelőihez tartozó magasság hossza legyen a BC oldal, illetve a megfelelő oldalak hosszának m-szerese.

Hasonlóan az AM_1D, PM_2G, AM_3H háromszögek is hasonlóak egymáshoz, mivel a megfelelő oldalaik párhuzamosak. Az AD oldalhoz, illetve megfelelőihez tartozó magasság hossza legyen az AD oldal, illetve a megfelelő oldalak hosszának n-szerese.

Az *ábra* jelöléseit felhasználva írjuk fel a bizonyítandó állítást:

$$\sqrt{\frac{nd^2}{2}-\frac{mc^2}{2}}+\sqrt{\frac{nb^2}{2}-\frac{ma^2}{2}}\le\sqrt{\frac{n(b+d)^2}{2}-\frac{m(a+c)^2}{2}}.$$

Ha az AD egyenes választaná el a BC egyenest az M_1-től, akkor a fenti képletbe a négyzetgyök alatti kifejezések ellentettjei kerülnek. Emeljük mindkét oldalt négyzetre, szorozzuk az egyenlőtlenség minkét oldalát 2-vel, majd rendezzük a következő formába:

$$\sqrt{(nd^2-mc^2)(nd^2-mc^2)}\le nbd-mac.$$

Újabb négyzetre emelés, és a szorzás elvégzése után rendezve a következő nyilvánvaló állítást kapjuk: $0\le nm(bc-ad)^2$. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, eredeti állításunk is igaz.

Egyenlőség csak akkor van, ha $bc-ad=0$, ekkor $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, amiből $\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$ következik.

Ekkor az A csúcsból mint középpontból nagyítsuk az AM_3H háromszöget $\frac{b+d}{d}$ arányban, ezzel az AM_1D háromszöget kapjuk. A PE szakasz képe a CB szakasz, különben a PE képe nem lehetne $a+c$ hosszúságú. Ezért egyenlőség esetén P az AC átlón van.

() *Jankó Zsuzsanna* (Szeged, Radnóti Miklós Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján