I. megoldás. Elég megmutatnunk, hogy a 2^n+n alakú számok között (ahol n páratlan szám) végtelen sok olyan van, amely 3-mal osztható (mivel ezek között legfeljebb egy lehet, ami nem összetett szám: a 3). Páratlan n esetén 2^n a 3-mal osztva 2 maradékot ad, hiszen ez $n=1$ esetén nyilván teljesül, ha pedig n értékét 2-vel növeljük, akkor 2^n értéke a 4-szeresére változik, ami nem változtatja meg a 3-mal való osztás maradékát. Az összeadás másik tagjában szereplő n pedig periodikusan ismétlődve ad egymás után 1-et, 0-t, 2-t, 1-et, 0-t, 2-t, $\ldots$ maradékul. Végtelen sokszor fordul tehát elő az 1-es maradék. Ezekben az esetekben az összeg osztható 3-mal. Ezzel állításunkat igazoltuk. Mivel minden harmadik páratlan számra osztható 3-mal az összeg, és legelőször akkor, ha $n=1$, ezeket a számokat felírhatjuk $6k+1$ alakban is, ahol k tetszőleges természetes szám. Mivel csak $k=0$ esetén adódik a prím 3, $k>0$ esetén 3-nál nagyobb 3-mal osztható számokat kapunk.

II. megoldás. A binomiális tétel segítségével mutatjuk meg, hogy az $n=6k+1$ alakú számok esetén 3 osztója a 2^n+n összegnek. Ekkor ugyanis 2^n-nek a 3-as maradéka 2, mivel

$$2^{6k+1}=(3-1)^{6k+1}=$$
$$=\underbrace{\binom{6k+1}{0}\cdot 3^{6k+1}-\binom{6k+1}{1}\cdot 3^{6k}+\ldots+\binom{6k+1}{6k}\cdot 3}_{\text{osztható 3-mal (tagonként is)}}-\binom{6k+1}{6k+1}=3A-1,$$

ahol A pozitív egész. Így $2^{6k+1}+6k+1=3A-1+6k+1=3\cdot(A+2k)$. Tehát ha $n=6k+1$, akkor valóban $3\mid 2^n+n$, ilyen alakú n pedig végtelen sok van és mindegyik páratlan. Továbbá ha $k>0$, akkor $2^n+n>3$, így valamennyi pozitív egész k esetén összetett számot kapunk.

() *Simon Balázs* (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.) megoldása alapján