**I. megoldás.** Az egész számokat 1-től $10^n$-ig egyesével leírva a leírt számjegyek számát jelöljük $A_n$-nel, a leírt nullák számát pedig $B_n$-nel. Ezzel a jelöléssel a feladat állítása: $A_n = B_{n+1}$. Jelölje továbbá tetszőleges $k$ pozitív egész szám esetén $a_k$ a pontosan $k$ jegyből álló pozitív egész számok számjegyeinek a számát, illetve $b_k$ a közöttük előforduló nullák számát. Mivel 1-től $10^n$-ig leírva az egész számokat, az összes 1-jegyű, 2-jegyű, $\dots$, $n$-jegyű pozitív egész számot és végül magát a $10^n$-t írjuk le, azért

(1) $$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n + 1 \quad (\text{a } 10^n\ n+1 \text{ jegyből áll}),$$

$B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + n$ (a $10^n$-ben $n$ db 0 található), azaz

(2) $$B_{n+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1} + n + 1$$

Tudjuk, hogy $a_1 = 9$. Tetszőleges $k \geq 2$ esetén a pontosan $k$ számjegyből álló pozitív egész számokban az első számjegy 9-féle lehet (0 nem lehet), a többi pedig egymástól függetlenül 10-féle, azaz $a_k = 9 \cdot 10^{k-1} \cdot k$.

Nyilván $b_1 = 0$. Tetszőleges $k \geq 2$ esetén a pontosan $k$ számjegyből álló számokban a 0-kat helyiértékenként számlálhatjuk meg: az első számjegy nem lehet 0, azaz a második számjegytől az utolsóig valamelyiket kiválasztva (ez $(k-1)$-féleképpen tehető meg) és azt 0-nak tekintve az első számjegy 9-féle lehet, az első és a kiválasztott kivételével a többi pedig 10-féle egymástól függetlenül, azaz $b_k = (k-1) \cdot 9 \cdot 10^{k-2}$.

Ezzel azt kaptuk, hogy tetszőleges $k$ pozitív egész szám esetén $a_k = b_{k+1}$; mivel $b_1 = 0$, az (1) és a (2) alapján $A_n = B_{n+1}$ is teljesül.

() *Filus Tamás* (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 10. évf.)

**II. megoldás.** Egészítsünk ki minden számot – a $10^n$ kivételével – $n$-jegyűre úgy, hogy az elejére 0-kat írunk. Eközben összesen $x$ db 0-t írunk le. Ekkor a leírt számjegyek száma is összesen $x$-szel nő. Elegendő megmutatnunk, hogy $A + x = B + x$.

Egy (esetleg kiegészített) $n$-jegyű szám leírásához $n$ db számjegy szükséges, tehát $10^{n-1}$ db $n$-jegyű szám leírásához $10^{n-1} \cdot n$ számjegyet kell leírni: $A + x = 10^{n-1} \cdot n$.

A $10^n$ leírásához $n$ db 0-t kell leírni, ami ugyanannyi, mintha a 0-t írnánk fel $n$-jegyű számként. Ha pedig 0-tól $(10^n - 1)$-ig felírunk minden számot és kiegészítjük $n$-jegyűvé úgy, hogy 0-kat írunk az elejére, akkor minden számjegyet minden helyiértéken ugyanannyiszor írunk le, tehát összesen is ugyanannyiszor írunk le minden számjegyet; ezért a leírt 0-k száma az összes leírt számjegy számának egytizede. Egy $n$-jegyű szám leírásához $n$ db számjegy szükséges, így $10^n$ db $n$-jegyű szám (0-tól $10^n - 1$-ig) leírásához $10^n \cdot n$ db számjegyet használunk föl. A korábban leírtak miatt az így leírt számjegyek egytizede 0, tehát a leírt 0-k száma $\dfrac{10^n \cdot n}{10} = 10^{n-1} \cdot n$, vagyis $B + x = 10^{n-1} \cdot n = A + x$.

() *Nagy Ákos* (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.)