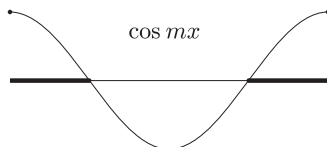


I. megoldás. A $\cos 2^k x$ függvények mindegyikének periódusa a 2π , így elegendő a megoldásokat a $[0; 2\pi)$ intervallumon keresni. Másfelől

$$\cos 2^k x = \cos (2^k(2\pi - x)),$$

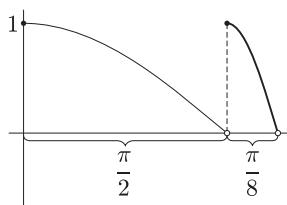
így föltehető, hogy $\alpha \in [0; \pi]$.

A keresett halmaz helyett vizsgáljuk annak komplementerét, legyen H a $[0; \pi]$ intervallum azon részhalmaza, amelynek x elemeire van olyan k , amelyre $\cos 2^k x > 0$. E halmaz meghatározásakor fölhasználjuk, hogy a $\cos mx$ függvény legkisebb periódusa $\frac{2\pi}{m}$. Hívjunk egy $\frac{2\pi}{m}$ hosszúságú intervallumot a $\cos mx$ függvény tiszta periódusának, ha az intervallum kezdőpontjában 1 a függvény értéke. Ekkor $\cos mx$ minden tiszta periódusának első és utolsó félig nyílt negyedében pozitív (1. ábra).



1. ábra

Így $\cos x > 0$, ha $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, ezért $[0; \frac{\pi}{2}) \subset H$. Vegyük észre, hogy ez az intervallum éppen a $\cos 4x$ függvény egy tiszta periódusa, emiatt az ehhez közvetlenül csatlakozó tiszta periódus alulról zárt első negyedén $\cos 4x$ pozitív (2. ábra): $[0; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) \subset H$.



2. ábra

Így haladva a $H_k = [0; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + \dots + \frac{\pi}{2 \cdot 4^k}) \subset H$ intervallumok sorozatát kapjuk. A k -edik lépést megelőző növekmények mindegyike egész számú többszöröse a $\cos 4^k x$ függvény periódusának, tehát a H_{k-1} intervallum végpontjában a függvény tiszta periódusa kezdődik. A k -edik lépésben tehát az intervallum ennek első negyedével, egy $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{4^k}$ hosszúságú felülről nyílt szakasszal bővül.

A H_k intervallumok felső végpontjai egy mértani sor részletösszegei, ennek első tagja $\frac{\pi}{2}$, hányadosa $\frac{1}{4}$, így a sor konvergens és az összege $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{3}$.

Ez azt jelenti, hogy ha $0 \leq x < \frac{2\pi}{3}$, akkor van olyan $k \geq 0$, amelyre $\cos 4^k x$ pozitív.

Hasonlóan kapjuk a 2 páratlan kitevőjű hatványaira a $\cos (2 \cdot 4^k x)$ függvények egymáshoz csatlakozó tiszta periódusainak utolsó negyedét figyelembe véve, π végpontú intervallumok alulról bővülő sorozatát. A $\cos 2x$ periódusa π , tehát a függvény a $[0; \pi]$ tiszta periódus utolsó, alulról nyílt negyedében pozitív. Ennek az intervallumnak az alsó végpontja, $\pi - \frac{\pi}{4}$ a $\cos 8x$ egy tiszta periódusának a végpontja. Ennek a tiszta periódusnak az utolsó, $\frac{\pi}{16}$ hosszúságú negyedén tehát $\cos 8x$ pozitív. Így haladva a π végpontú intervallum hosszára adódó mértani sor első tagja $\frac{\pi}{4}$, hányadosa $\frac{1}{4}$, a sor összege az előbbi összeg fele, $\frac{\pi}{3}$. Ha tehát $\pi - \frac{\pi}{3} < x \leq \pi$, akkor van olyan $k \geq 0$, amelyre $\cos (2 \cdot 4^k x)$ pozitív.

Eszerint $[0; \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}; \pi] \subset H$, a $[0; \pi]$ egyetlen szóbajövő eleme $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Ekkor $\cos \alpha = -0,5$ és $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ miatt $\cos 2^n \alpha = \cos \alpha = -0,5$ minden pozitív egész n -re. Így a $[0; \pi]$ intervallumban $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, a $[0; 2\pi)$ intervallumban ezen kívül $\alpha = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, a további megoldások pedig: $\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, illetve $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, ahol n és m tetszőleges egész számok.

()

Megjegyzés. A helyes megoldások nagy része általában abból indult ki, hogy egy adott α szögére pontosan akkor teljesül a feltétel, ha minden $k \geq 0$ egészre van olyan m egész szám, hogy

$$(*) \quad (2m+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2^k \alpha \leq (2m+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Ha $k=0$, akkor ez a $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ feltételt jelenti, amit az előző megoldás szerint most is föltehető $0 \leq \alpha < \pi$ korlát az $I_1 = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ intervallumra szűkít. Innen 2α -ra egy π hosszúságú intervallumot kapunk: $\pi \leq 2\alpha < 2\pi$. A $(*)$ -beli π hosszúságú intervallumok közül ezzel pontosan egynek, az $m=0$ esetén adódó $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumnak nem üres a metszete. A két intervallum közös része $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, így α -ra egy $\frac{\pi}{4}$ hosszúságú intervallum, az előző intervallum „alsó fele” adódik: $I_2 = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] = \left[\frac{2\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Ugyanígy haladhatunk tovább. Az α szögére a k -adik lépésben kapott

$$I_k = \left[\frac{n\pi}{2^k}; \frac{(n+1)\pi}{2^k}\right]$$

intervallumot 2^k -szorosára nagyítva kapjuk, hogy $n\pi \leq 2^k \alpha \leq (n+1)\pi$. Ezt a $(*)$ intervallumok közül ismét pontosan egy metszi, a közös rész egy $\frac{\pi}{2}$ hosszúságú intervallum, amelyet 2^{k+1} -szeresére kicsinyítve kapjuk I_{k+1} -et, az előbbi I_k intervallum valamelyik felét. Hogy ez az alsó, vagy pedig a felső, az attól függ, hogy n páratlan-e, vagy páros. A megoldáshoz azt kellett megmutatni, hogy ez lépésenként váltakozik – ez általában teljes indukcióval történt – és így az egymásba skatulyázott intervallumok közös részeként adódik $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. A következő megoldás elegánsan kerüli el a fenti bonyodalmakat.

II. megoldás. Keressük a $[0; 2\pi)$ -beli megoldásokat $\alpha = d \cdot 2\pi$ alakban, ahol $0 \leq d < 1$. Ekkor $2\alpha = 2d \cdot 2\pi$, tehát $\cos 2\alpha = \cos(\{2d\} \cdot 2\pi)$ és általában, ha $d_k = \{2^k d\}$, akkor $\cos 2^k \alpha = \cos(d_k \cdot 2\pi)$. A törtrész definíciója szerint $d_k \cdot 2\pi$ éppen $2^k \alpha$ maradéka 2π -vel osztva.

Ha $0 \leq \varphi < 2\pi$, akkor $\cos \varphi \leq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, ami a d_k együtthatókra nézve azt követeli meg, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{4} \leq d_k \leq \frac{3}{4}$$

teljesüljön minden $k \geq 0$ egész számra.

Maguk a d_k együtthatók természetes módon adódnak, ha a d kettes számrendszerbeli alakjából indulunk ki. Legyen $d = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ a d kettes- vagy másképpen diadikus tört alakja. Az egyes jegyek értéke tehát 0 vagy 1. (A véges diadikus törteknek kétféle alakját is megengedjük, az adott helyiértéktől kezdődően azonosan nulla törteken kívül azokat is, amelyekben egy adott helyiértékkel kezdődően minden jegy 1-es.) Ekkor a 2-vel való szorzás eggyel jobbra lépteti a „kettesdesvesszőt”, $2d = x_1 x_2 x_3 \dots$, az egész rész leválasztása pedig ezután törli az első jegyet: $\{2d\} = 0, x_2 x_3 x_4 \dots$. Kettes számrendszerben $\frac{1}{4} = 0,01$ és $\frac{3}{4} = 0,11$, tehát kettes számrendszerben (1) azt jelenti, hogy minden $k \geq 0$ egész számra teljesülnie kell, hogy

$$(2) \quad 0,01 \leq 0, x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots \leq 0,11.$$

Azt állítjuk, hogy ez pontosan akkor igaz, ha d -nek nincsenek egyenlő szomszédos jegyei, bármely két szomszédos helyiértéken 01 vagy 10 áll.

Ha ugyanis $d = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ tartalmaz valahol két szomszédos 0-t, valamilyen k -ra $x_k = x_{k+1} = 0$, akkor $0,01 \leq d_k = 0,00 x_{k+2} x_{k+3} \dots$ miatt a $(k+2)$ -edik helyiértékkel kezdődően minden jegy 1-es és így $d_{k+2} = 0,111 \dots = 1 > \frac{3}{4}$.

Hasonlóan, két szomszédos 1-es $0,11 x_{k+2} x_{k+3} \dots = d_k \leq 0,11$ miatt azt jelentené, hogy a $(k+2)$ -edik helyiértékkel kezdődően minden jegy 0 és így $d_{k+2} = 0,000 \dots = 0 < \frac{1}{4}$.

A talált feltétel alapján d első jegye egyértelműen határozza meg a többi. Ha $x_1 = 0$, akkor $d' = 0,0101 \dots = 0,0\overline{01} = \frac{1}{3}$, ha pedig $x_1 = 1$, akkor $d'' = 0,1010 \dots = 0,1\overline{0} = \frac{2}{3}$.

Erre a két számra nyilvánvalóan teljesül (2), így a feladatnak két megoldása van a $[0; 2\pi)$ intervallumon: $\alpha' = \frac{1}{3} \cdot 2\pi$ és $\alpha'' = \frac{2}{3} \cdot 2\pi$. A periodicitást figyelembe véve pedig $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, vagy pedig $\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$.

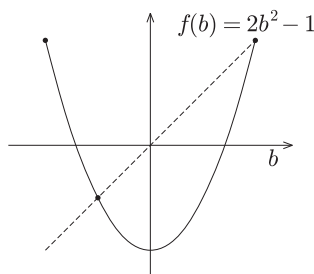
() Bereczky Péter (SZTE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, 10. évf.)

III. megoldás. Ebben a megoldásban α helyett $\cos \alpha$ értékét határozzuk meg. Ismeretes, hogy $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, így ha $\cos \alpha = b$, akkor $\cos 2\alpha = 2b^2 - 1 = f(b)$.

Azokat a $b \in [-1; 1]$ értékeket keressük, amelyekre a

$$(*) \quad b_1 = b, \quad b_{k+1} = f(b_k)$$

sorozat elemei nem pozitívak.



3. ábra

Az f függvény a $[-1; 1]$ intervallumot „kétszeresen” képezi le önmagára (3. ábra), két fixpontja van, $f(1) = 1$ és $f(-0,5) = -0,5$. Innen nyomban adódik, hogy ha $b_1 = -0,5$; akkor a b_k sorozat állandó és így minden tagja negatív, ez az érték tehát megfelelő. Azt állítjuk, hogy minden más kezdőértékre a $(*)$ sorozat tagjai között van pozitív szám. Legyen tehát $0 \geq b \neq -0,5$. Egyszerű algebrai átalakítással

$$(3) \quad f(b) + 0,5 = 2(b^2 - 0,25) = (2b - 1)(b + 0,5).$$

Innen kiolvasható, hogy ha $b < 0$ és így $|2b - 1| > 1$, akkor $|f(b) + 0,5| > |b + 0,5|$, a sorozat tagjai távolodnak $-0,5$ -től. Ebből még általában nem következik, hogy a b_n sorozat feltétlenül kilép egy adott intervallumból. Ehhez olyan becslésre volna szükség, ahol a távolodás mértéke nem függ a b értékétől. Ilyen becslést kaphatunk, ha a sorozat három szomszédos tagját vesszük figyelembe.

Először is jegyezzük meg, hogy (3)-ból következik, hogy ha $0 \geq b \neq -0,5$; akkor $f(b)$ sem lehet $-0,5$. Most $(2b - 1)$ negatív, ezért a nullától különböző $b + 0,5$ és $f(b) + 0,5$ értékek (3) szerint ellenkező előjelűek. Ha még $f(b) \leq 0$ is teljesül, akkor mivel $-0,5$ elválasztja b -t és $f(b)$ -t, $|2b - 1|$ és $|2f(b) - 1|$ közül a nagyobbik legalább $1,5$. Mivel a kisebbik is legalább 1 , azért

$$(2f(b) - 1)(2b - 1) \geq (0 - 1)(-0,5 - 1) = 1,5.$$

Írjunk (3)-ban b helyére $f(b)$ -t, majd használjuk fel ismét (3)-at:

$$(4) \quad f(f(b)) + 0,5 = (2f(b) - 1)(f(b) + 0,5) = (2f(b) - 1)(2b - 1)(b + 0,5).$$

A fentiek szerint ha $0 \geq b \neq -0,5$ és $f(b) \leq 0$, akkor

$$|f(f(b)) + 0,5| \geq 1,5 \cdot |b + 0,5|.$$

Azt kaptuk, hogy ha $b_1 \neq -0,5$; akkor ameddig a b_k sorozat elemei nem pozitívak, addig egyikük sem lehet $-0,5$; másrészt b_{k+2} legalább másfélszer olyan messze van $-0,5$ -től, mint b_k . Ha tehát $b_1 \neq -0,5$; akkor a b_k sorozat elemei nem lehetnek valamennyien a $[-1; 0]$ intervallumban. Mivel pedig tetszőleges $b_1 \in [-1; 1]$ kezdőértékre a sorozat minden eleme a $[-1; 1]$ intervallumban van, azért a sorozatnak ilyenkor van pozitív eleme.

Végül ha $b_1 = \cos \alpha = -0,5$; akkor $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, ahol n tetszőleges egész szám.

() *Hubai Tamás* (Budapest, Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.) dolgozata nyomán