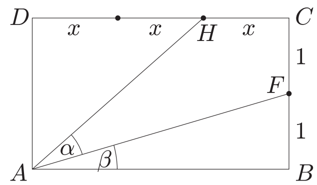
I. megoldás. Hasonló téglalapokban a HAF szög egyenlő. Rögzítsük a BC oldalt és változtassuk az AB oldalt, így a sík minden téglalapjához találunk hasonlót e téglalapok között. Legyen a BC szakasz hossza 2, az AB szakaszé $3x$. Ekkor a $\beta = FAB$ szög tangense: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3x}$, és az $\alpha+\beta = HAB$ szög tangense:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$



Felhasználva a $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\big((\alpha+\beta)-\beta\big)$-ra vonatkozó addíciós képletet:

$$\operatorname{tg}\big((\alpha+\beta)-\beta\big) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3x}}{1+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3x}} = \frac{2x}{3x^2+1} = \frac{2}{3x+\frac{1}{x}}.$$

A kifejezés nevezőjében „majdnem" egy szám és a reciprokának az összege található. $\sqrt{3}$-mal osztva a számlálót és a nevezőt a következő adódik:

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}x}}.$$

A tört nevezője itt már egy pozitív számnak és a reciprokának az összege, ezért ennek az értékkészlete a $[2,\infty)$ intervallum. Így a tört értéke, tehát a HAF szög tangensének értéke a $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ intervallum bármelyik eleme lehet. Mivel hegyesszögekre a tangens függvény monoton növekedő, a HAF szög 0 és $\dfrac{\pi}{6}$ között bármely értéket fölvehet. Maximális értéke $\dfrac{\pi}{6}$.

() *Fejes Lívia* (Fonyód, Mátyás Király Gimnázium, 11. o.t.)

II. megoldás. Rögzítsük a D és C pontokat, és jelölje D' és H' a D és H tükörképét C-re. Mivel D' az AF egyenesen van, azért a HAD' szög egyenlő a HAF szöggel. Képzeljük el, hogy a HAF szög γ nagysága adott, és vizsgáljuk az A pont helyzetét. Az A pont egyrészt a D-ben DC-re emelt merőlegesen helyezkedik el, másrészt egy olyan γ szögű látóköríven, melynek két végpontja éppen H és D', a kör középpontja pedig a CD egyenesre H'-ben emelt merőlegesre esik. A kör sugara ezért legalább $HD' = DH'$; ha éppen ennyi, akkor a HD' szakaszhoz tartozó középponti szög $\dfrac{\pi}{3}$, azaz $\gamma = \dfrac{\pi}{6}$. Ha a kör sugarát növeljük, akkor γ értéke csökken, és minden esetben az A pont megszerkeszthető. Tehát a HAF szög nagysága tetszőleges, $\dfrac{\pi}{6}$-nál nem nagyobb pozitív érték lehet.