Megoldás. Az $x = y = 2$ helyettesítésből $f(2)^2 = 2f(2)$, így $f(2) = 2$. ($f(2) \neq 0$, hiszen a függvény pozitív értékeket vesz fel.) Az $x = y = 1$ helyettesítésből $f(2) = 2$ miatt $f(1)^2 - 3f(1) + 2 = 0$, azaz $f(1) = 1$ vagy $f(1) = 2$.

1. eset: $f(1) = 2$. Megmutatjuk, hogy a függvény csak a konstans 2 lehet. Helyettesítsünk a függvényegyenletbe $y = 1$-et:

$$f(x+1) = 2f(x) + f(1) - f(x) \cdot f(1) = 2.$$

Ezzel máris igazoltuk, hogy $x > 1$ esetén $f(x) = 2$. Legyen most x tetszőleges, és válasszuk y-t olyan nagynak, hogy y, xy és $x + y$ is nagyobb legyen, mint 1. Ekkor $f(x + y) = f(xy) = f(y) = 2$, és a függvényegyenlet szerint $2 + f(x) \cdot 2 = 2 + f(x) + 2$, azaz $f(x) = 2$.

A konstans 2 függvény eleget is tesz a függvényegyenletnek: az x és y megválasztásától függetlenül mindkét oldal értéke 6.

2. eset: $f(1) = 1$. Először megmutatjuk, hogy az f függvény egyszerre additív és multiplikatív, azaz tetszőleges u, v számok esetén $f(u + v) = f(u) + f(v)$ és $f(uv) = f(u)f(v)$, majd ennek felhasználásával bebizonyítjuk, hogy az f függvény csak az identitás lehet: $f(x) = x$. Az (1) függvényegyenlet alapján elég az additív tulajdonságot igazolni, a multiplikatív tulajdonság ebből már következik.

A függvényegyenletbe $y = 1$-et helyettesítve $f(x + 1) + f(x) = 2f(x) + 1$, tehát $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Legyen most u és v két tetszőleges pozitív szám. Az (1) egyenletet írjuk fel az $x = u$, $y = \frac{v}{u}$ és az $x = u$, $y = \frac{v}{u} + 1$ számpárokra is:

$$f\left(u + \frac{v}{u}\right) + f(u) \cdot \left(\frac{v}{u}\right) = f(v) + f(u) + f\left(\frac{v}{u}\right),$$

illetve

$$f\left(u + \frac{v}{u} + 1\right) + f(u) \cdot f\left(\frac{v}{u} + 1\right) = f\left(u \cdot \left(\frac{v}{u} + 1\right)\right) + f(u) + f\left(\frac{v}{u} + 1\right),$$
$$f\left(u + \frac{v}{u}\right) + 1 + f(u)\left(f\left(\frac{v}{u}\right) + 1\right) = f(u + v) + f(u) + f\left(\frac{v}{u}\right) + 1.$$

A két egyenletet kivonva egymásból, $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Ezzel az additív tulajdonságot igazoltuk.

Az additivitásból és $f(1) = 1$-ből következik, hogy tetszőleges n pozitív egészre $f(n) = n$. A multiplikativitás alapján pedig tetszőleges k, n egészek esetén

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(k)}{f(n)} = \frac{k}{n}.$$

Tehát tetszőleges q pozitív racionális számra $f(q) = q$.

Az additivitásból és a függvény pozitivitásából az is következik, hogy a függvény monoton: $x < y$ esetén $f(x) < f(x) + f(y - x) = f(y)$.

Legyen most x egy tetszőleges pozitív valós szám, és tegyük fel, hogy $f(x) \neq x$. Ha $f(x) < x$, akkor – mivel a racionális számok halmaza sűrű – létezik egy olyan q racionális szám, amelyre $f(x) < q < x$. A $q < x$ egyenlőtlenségből azonban a függvény monotonitása miatt az következik, hogy $q = f(q) < f(x)$, ami ellentmondás. Ha $f(x) > x$, akkor az egyenlőtlenségek irányának megfordításával hasonlóan jutunk ellentmondásra. Tehát csak $f(x) = x$ lehetséges.

Az $f(x) = x$ függvény eleget tesz a feltételeknek; az (1) függvényegyenlet mindkét oldalán $xy + x + y$ áll.

Megjegyzések. A 2. esetben a függvénynek több érdekes tulajdonságát bizonyítottuk, illetve használtuk fel:

- $f(1) = 1$;
- A függvény pozitív;
- A függvény (szigorúan) monoton nő;
- A függvény additív;
- A függvény multiplikatív.

Ezekből a tulajdonságokból – illetve bizonyos részhalmazaikból – többféleképpen is igazolható, hogy $f(x) = x$. Például, ha egy függvény egyszerre pozitív és additív, akkor lineáris: $f(x) = cx$ alkalmas c konstanssal. (Az $f(1) = 1$ tulajdonságból kapjuk, hogy $c = 1$.)

A multiplikativitásból egyszerűen következik a pozitivitás: tetszőleges x pozitív valós számra $f(x) = f\left(\sqrt{x}^2\right) = f^2\left(\sqrt{x}\right) \geq 0$. Ezért nem nehéz az összes olyan $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (tehát nem feltétlenül pozitív) függvényt sem megtalálni, amely eleget tesz az (1) függvényegyenletnek. A már látott két eset lényegében ugyanígy vizsgálható, ezen kívül még az $f(2) = 0$, ezen belül az $f(1) = 0$, illetve $f(1) = 3$ eseteket kell megvizsgálni.

A valós vagy a pozitív valós számok halmazán értelmezett, egyszerre additív és multiplikatív függvények halmaza igen szűk: az identitáson kívül csupán a konstans 0 ilyen. Más algebrai testeken vagy gyűrűkön értelmezett függvények esetében ez a problémakör lényegesen bonyolultabb.