Megoldás. Legyen $p=0{,}2499$ és legyen $1<r<\dfrac{1}{4p}$. A feltételek szerint létezik olyan elég nagy n_0 pozitív egész, hogy $n\ge n_0$ esetén $na_n<p$. Ha n_0-t elég nagynak választjuk, akkor az is teljesül, hogy $\dfrac{n}{n-2}<r$.

Tetszőleges $N\ge n_0$ egész számra legyen $S(N)=\sup\{na_n\colon n\ge N\}$. Az n_0 választása szerint például $S(n_0)\le p$.

Ha $N\ge n_0$ és $n\ge 2N$, akkor

$$na_n=n\sum_{k=n}^{\infty}(a_k-a_{k+1})\le n\sum_{k=n}^{\infty}a_{\left[\frac{k}{2}\right]}a_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\le n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{S(N)}{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot\frac{S(N)}{\left[\frac{k+1}{2}\right]}<$$
$$<n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{S^2(N)}{\frac{k-2}{2}\cdot\frac{k-1}{2}}=4nS^2(N)\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)=\frac{4nS^2(N)}{n-2}<4rS^2(N).$$

Ez minden $n\ge 2N$-re igaz, így $S(2N)=\sup\{na_n\colon n\ge 2N\}\le 4rS^2(N)$, vagy másképpen $4rS(2N)\le\big(4rS(N)\big)^2$. Ezt m-szer alkalmazva,

$$S(2^mN)<4rS(2^mN)\le\big(4rS(2^{m-1}N)\big)^2\le\big(4rS(2^{m-2}N)\big)^4\le\dots\le\big(4rS(N)\big)^{2^m}.$$

Legyen most $n>n_0$ tetszőleges pozitív egész. Válasszuk meg az m nemnegatív egészt úgy, hogy $2^mn_0\le n<2^{m+1}n_0$ teljesüljön. Ekkor

$$a_n\le\frac{S(2^mn_0)}{n}<\big(4rS(n_0)\big)^{2^m}\le(4rp)^{2^m}<(4rp)^{n/(2n_0)}=\left(\sqrt[2n_0]{4rp}\right)^n.$$

(Az r választása szerint $4rp<1$, az m választása szerint pedig $2^m>\dfrac{n}{2n_0}$.)

Legyen $q=\sqrt[2n_0]{4rp}$. Mint láttuk, $n>n_0$ esetén $a_n<q^n$. A $4rp<1$ egyenlőtlenségből az is következik, hogy $q<1$. A q szám tehát megfelel a feladat feltételeinek.

Megjegyzés. A $p=0{,}2499$ szám helyére bármilyen $\dfrac14$-nél kisebb számot írhatunk, a megoldás ugyanígy elmondható. Az állítás $p=\dfrac14$ esetén viszont már nem igaz. Például az $a_n=\dfrac{1}{4n+1}$ sorozatra teljesül az (1) egyenlőtlenség, tetszőleges n esetén $na_n<\dfrac14$, de a sorozat nem becsülhető felülről semmilyen 1-nél kisebb hányadosú mértani sorozattal.