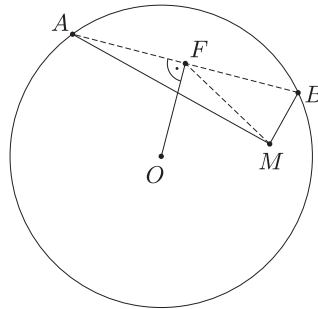


I. megoldás. Jelölje H a keresett ponthalmazt, O a kör középpontját, r pedig a sugarát. Ha $F \in H$, akkor OF merőleges az AB húrra, így Pitagorasz tétele szerint $OF^2 + AF^2 = OA^2 = r^2$ (1. ábra). A derékszögű AMB háromszögben F az átfogó felezőpontja, ezért $AF = FM$, és így

$$(1) \quad OF^2 + FM^2 = r^2.$$

Állítjuk, hogy a talált feltétel elégséges: ha a sík egy adott F pontjára teljesül (1), akkor $F \in H$. Először is megmutatjuk, hogy ekkor F a kör középpontjától különböző belső pont, azaz $0 < OF < r$. (1) miatt nyilván $0 \leq OF \leq r$. Ha itt $OF = 0$, azaz $O = F$, akkor $FM = OM = r$, ami nem lehet, hiszen az M belső pont. Hasonlóan, ha $OF = r$, akkor $FM = 0$, F és M esnek egybe és ismét $OM = r$ adódik.

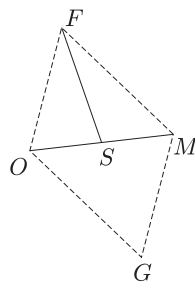


1. ábra

Létezik tehát az OF -re F -ben merőleges egyenes és két pontban metszi a kört. Ha ez a szelő az AB húr, akkor az F pont felezi, így a Pitagorasz-tételből $AF^2 = r^2 - OF^2$, ami (1) szerint éppen FM^2 . Így $FA = FM = FB$, és mivel A , B és M különböző pontok, a létrejövő AMB háromszögben az M csúcsnál valóban derékszög van.

Azt kell tehát tisztáznunk, hogy mi azoknak az F pontoknak a mértani helye, amelyekre (1) teljesül, azaz amelyek két adott ponttól mért távolságának négyzetösszege állandó. Ezt megtehetnénk koordináta geometriai eszközökkel, azonban egy hasznos eredmény, az úgynevezett paralelogramma-tétel gyors befejezést tesz lehetővé.

Tétel. Egy paralelogrammában az oldalak négyzetösszege az átlók négyzetösszegével egyenlő. (A tétel a *Geometriai feladatok gyűjteménye* II. 289. feladata.)



2. ábra

Tükrözzük az OFM háromszöget az OM szakasz S felezőpontjára (2. ábra). Így az $OFMG$ paralelogrammát kapjuk. Ha $OM = d$, akkor a paralelogramma-tétel szerint a sík tetszőleges F pontjára

$$2(OF^2 + FM^2) = OM^2 + FG^2 = d^2 + 4FS^2.$$

Rendezés után

$$(2) \quad FS^2 = \frac{1}{4}(2(OF^2 + FM^2) - d^2),$$

tehát (1) pontosan akkor teljesül az F pontra, ha $FS^2 = \frac{1}{4}(2r^2 - d^2)$. Ez pedig akkor és csak akkor igaz, ha F az S középpontú, $\frac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}$ sugarú körön van.

Mivel minden egyes lépésben szükséges és elégséges feltételt adtunk meg, a keresett mértani hely egy kör, amelynek középpontja az OM szakasz felezőpontja, sugara pedig $\frac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}$.

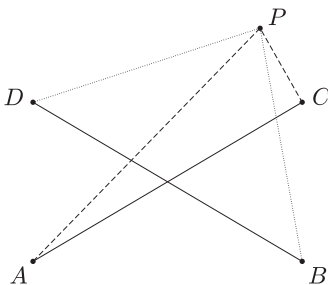
Megjegyzés. Ha adottak a síkon az A_1, A_2, \dots, A_n pontok és egy P_0 pont, akkor akár a paralelogrammatétel ismételt alkalmazásával, akár koordináta geometriai eszközökkel egyszerűen igazolható, hogy azon P pontok mértani helye, amelyekre

$$A_1P^2 + A_2P^2 + \dots + A_nP^2 = A_1P_0^2 + A_2P_0^2 + \dots + A_nP_0^2$$

egy olyan kör, amelynek a középpontja az A_1, A_2, \dots, A_n pontrendszer S súlypontja és a kör átmegy a P_0 ponton. Ha pedig azt kérdezzük, hogy mi azon P pontok mértani helye, amelyekre az $A_1P^2 + A_2P^2 + \dots + A_nP^2$ négyzetösszeg állandó, akkor a válasz ennek az állandónak az értékétől függően egy S középpontú kör, az S pont, vagy pedig üres halmaz.

II. megoldás. A megoldásban felhasználjuk az alábbi segédtételt:

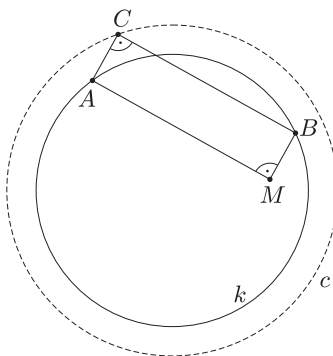
Ha az $ABCD$ négyszög téglalap, akkor a sík – valójában a tér – tetszőleges P pontjára $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ (3. ábra).



3. ábra

Ez az állítás az I. megoldásban kimondott paralelogramma-tételből következik. Annak (2) alakja szerint ugyanis egy pontot egy szakasz két végpontjával összekötő szakaszok négyzetösszege kizárólag a szakasz hosszától és a pontnak a szakasz felezőpontjától mért távolságától függ. Mivel egy téglalap átlói egyenlő hosszúak, a felezőpontjuk pedig egybeesik, az állítás valóban igaz.

Tekintsük most az M csúcsú derékszög egy adott helyzetét, és egészítsük ki az AMB háromszöget téglalappá (4. ábra). Legyen ennek a téglalpnak a negyedik csúcsa C .



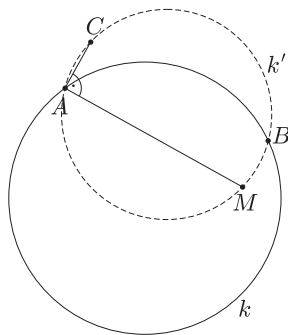
4. ábra

Ekkor a fenti állítást az adott – és a továbbiakban k -val jelölt – kör O középpontjára és erre a téglalpra alkalmazva $OM^2 + OC^2 = OA^2 + OB^2 = 2r^2$. Ez azt jelenti, hogy a derékszöggel együtt forgó C pont állandó távolságra van a k kör O középpontjától:

$$(3) \quad OC^2 = 2r^2 - d^2.$$

(Az előző megoldás szerint az OM szakasz hossza d .)

Megmutatjuk, hogy az így adódó, k -val koncentrikus c kör minden C pontjához van az M körül forgó derékszögnek olyan helyzete, hogy a 4. ábra szerint kapott téglalap negyedik csúcsa éppen C . Próbáljuk ehhez megszerkeszteni a megfelelő téglalapot.

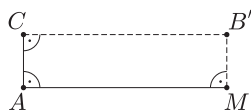


5. ábra

Mivel $d < r$, azért (3)-ból $OC > r$ adódik, a C tehát külső pontja a k körnek. A feltétel szerint viszont az M belső pont, így pedig az MC átmérőjű k' kör két pontban metszi k -t. Legyenek ezek A és B . (5. ábra). Meg kell mutatnunk, hogy az így szerkesztett $CAMB$ négyszög valóban téglalap.

Thalész tétele szerint $CAM \sphericalangle = 90^\circ$, van tehát olyan B' pont, amelyre a $CAMB'$ négyszög téglalap (6. ábra). Ennek a körülírt köre a CAM háromszög körülírt köre, azaz k' . A megoldás elején kimondott állítást most erre a $CAMB'$ téglalpra és az O pontra alkalmazva (3) felhasználásával kapjuk, hogy

$$OB'^2 = OC^2 + OM^2 - OA^2 = (2r^2 - d^2) + d^2 - r^2 = r^2.$$



6. ábra

A B' pont tehát a k körön is rajta van, és így nem más, mint a k és k' körök A -tól különböző metszéspontja, a B pont. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a $CAMB$ négyszög azonos a $CAMB'$ téglalappal.

A C pontok mértani helye tehát az O középpontú, $\sqrt{2r^2 - d^2}$ sugarú c kör. Mivel F a szóban forgó téglalap AB átlójának a felezőpontja, azért felezi az MC átlót is. A keresett ponthalmaz tehát az MC szakaszok felezőpontjainak a mértani helye, miközben a C pont befutja a c kört: éppen a c körnek az M pontból felére kicsinyített képe. Az F pontok mértani helye tehát egy $\frac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}$ sugarú kör, melynek középpontja az OM szakasz felezőpontja.

()

Pongrácz András (Szolnok, Verseyhy Ferenc Gimn., 11. évf.) ötlete alapján