Megoldás. Az (1) egyenlet akkor értelmes, ha $ax>0$ és $x+1>0$. Ha $a>0$, akkor ez a pozitív számokra teljesül, ha $a=0$, akkor nincs ilyen szám, ha pedig $a<0$, akkor $-1<x<0$ az értelmezési tartomány. Jelölje ezt az a-tól függő halmazt T_a.

Ha $x\in T_a$, akkor $2\lg(x+1)=\lg(x+1)^2$, ahonnan az $ax=(x+1)^2$ egyenletet kapjuk, amit rendezve

$$x^2+(2-a)x+1=0. \tag{2}$$

A két egyenlet, (1) és (2) csak a T_a halmazon ekvivalens; ha a (2) egyenletet a valós számok halmazán vizsgáljuk – ami kényelmesebb –, akkor általában bővebb megoldáshalmazt kapunk. Az a paraméternek azokat az értékeit kell megtalálnunk, amikor a (2) egyenletnek egyetlen valós gyöke van a T_a halmazon. Ez kétféleképpen lehetséges: a másodfokú (2)-nek is egyetlen gyöke van és ez eleme T_a-nak is, vagy pedig (2)-nek két gyöke van ugyan, de közülük csak az egyik van ott a T_a halmazban. (Erről az utóbbi lehetőségről igen sokan megfeledkeztek.)

Az első esetben (2) diszkriminánsa, $D=(2-a)^2-4=a(a-4)=0$. Ha $a=0$, akkor T_a üres, (1)-nek nincs megoldása. Ha $a=4$, akkor T_a a pozitív számok halmaza, (2) bal oldala pedig $(x-1)^2$, az egyetlen gyök $x=1$, ami valóban az (1) egyenlet egyetlen megoldása.

Vizsgáljuk meg a második lehetőséget: ekkor (2)-nek két megoldása van, ami pontosan akkor teljesül, ha $D=a(a-4)>0$, azaz $a>4$ vagy $a<0$. Legyenek $x_1<x_2$ a (2) gyökei. A gyökök és együtthatók összefüggése szerint $x_1x_2=1$, a két gyök tehát azonos előjelű. Nem lehet tehát pontosan az egyikük pozitív, így az $a>4$ esetben, amikor T_a a pozitív számok halmaza, az (1) egyenletnek nem lehet egyetlen gyöke. (Mivel $x_1+x_2=a-2>0$, most mindkét gyök pozitív, így az (1) egyenletnek ekkor két gyöke van.)

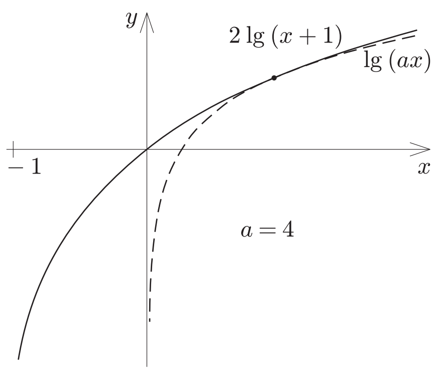
Ha $a<0$, akkor a gyökök összege, $x_1+x_2=a-2<0$, a két azonos előjelű gyök negatív. Az (1) egyenletnek ezúttal pontosan akkor van egy gyöke, ha -1 „elválasztja" a két negatív gyököt, a kisebbik nincs a T_a halmazban. Ez pedig most teljesül, hiszen a két negatív gyök szorzata 1 és nem egyenlők. Ha tehát a negatív, akkor a (2) egyenlet két valós gyöke közül a nagyobbik lesz gyöke az (1) egyenletnek is.

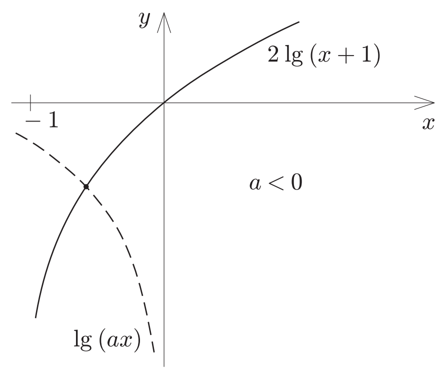
Az (1) egyenletnek tehát akkor van pontosan egy valós gyöke, ha $a=4$ vagy $a<0$.

() *Jelitai Kálmán* (Budapest, Szent István Gimn., 12. évf.) dolgozata nyomán

Megjegyzések. 1. Sok hibás dolgozat érkezett. A tipikus hiba a két egyenlet ekvivalenciájának föltételezése volt, a szerzők a diszkrimináns nulla értékeinek vizsgálatára szűkítették a feladatot.

2. A helyes megoldások általában a másodfokú egyenlet megoldóképletéből adódó formulákat használták a gyökök vizsgálatára. A gyökök összege és szorzata alapján sok kérdés gyorsabban válaszolható meg, hiszen a Viète-formulák szerkezete lényegesen egyszerűbb.





3. Gyorsabban célhoz érünk és a feladat szerkezete is világos lesz, ha grafikusan oldjuk meg a feladatot. Az *ábrák* az egyenlet két oldalán álló függvényeket ábrázolják a T_a halmazon az $a>0$, illetve az $a<0$ esetben. A jólismert grafikonokról azonnal leolvasható, hogy az első esetben a (2) egyenlet diszkriminánsa az (1) egyenlet viselkedését is a szokott módon jellemzi, illetve hogy ha $a<0$, akkor az (1) egyenletnek pontosan egy megoldása van.