Megoldás. A feladat egyenlőtlenségében x helyére 3-at és y helyére 2-t írva teljesülnie kell, hogy $t\cdot 12\ge\sqrt{6}$, és így t értéke legalább $\dfrac{\sqrt{6}}{12}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség minden ilyen t értékre teljesül, ha x és y nemnegatív számok.

A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget a feltétel szerint nemnegatív $2x$ és $3y$ értékekre felírva

$$2x+3y\ge 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6}\sqrt{xy}.$$

Ha $t\ge 0$, akkor t-vel szorozva

$$t(2x+3y)\ge t\cdot 2\sqrt{6}\sqrt{xy}. \tag{1}$$

Ha $t\ge\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, azaz $t\cdot 2\sqrt{6}\ge 1$, akkor (1) jobb oldala nagyobb, vagy egyenlő, mint $\sqrt{xy}$, igaz tehát a szóban forgó egyenlőtlenség.

A vizsgált egyenlőtlenség tehát pontosan akkor teljesül minden nemnegatív x, y valós számra, ha t legalább $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

() *Kalcsú Áron* (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A megoldások lényegében a fenti utat követték. Az első lépésben persze minden olyan helyettesítés megfelel, amikor egyenlőség van a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben, azaz $2x=3y$. Valamit egyszerűsödik a feladat szerkezete, ha úgy rendezzük át, hogy ne függjön mindkét oldal a változóktól, azaz például

$$A(x,y)=\frac{\sqrt{xy}}{2x+3y}\le t$$

alakban vizsgáljuk. (Eközben persze ki kell zárnunk az $x=y=0$ esetet, de ez nyilván nem jelent megszorítást a t-re.) Innen jobban látszik, hogy valójában az $A(x,y)$ függvény legkisebb felső korlátját keressük. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint az $A(x,y)$ függvénynek létezik maximális értéke, és az éppen $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, a feladat megoldása.