Megoldás. Az állítás semmitmondó egyenlőségbe megy át, ha $n=1$; tegyük föl, hogy $n>1$. Ekkor a fenti összeg $(n-1)$ csoportra osztható, ezeket egy-egy nulla értékű tag, $\left\{\sqrt{m^2}\right\}=\{m\}$ választja szét. Az m-edik csoport egy $2m$ tagú összeg,

$$S_m=\left\{\sqrt{m^2+1}\right\}+\left\{\sqrt{m^2+2}\right\}+\cdots+\left\{\sqrt{m^2+2m}\right\},\quad m=1,2,\ldots,n-1.$$

A feladat $\sum_{m=1}^{n-1} S_m$ becslését kívánja, a megoldáshoz az S_m összegek tagjait becsüljük két oldalról: megmutatjuk, hogy ha $1\le k\le 2m$, akkor

$$\frac{k}{2m+1}<a_{m,k}=\left\{\sqrt{m^2+k}\right\}<\frac{k}{2m}. \tag{1}$$

Használjuk fel, hogy minden valós számra $\{x\}=x-[x]$. Ha $1\le k\le 2m$, akkor $m^2<m^2+k<m^2+2m+1=(m+1)^2$, és így $\left[\sqrt{m^2+k}\right]=m$. Így

$$a_{m,k}=\sqrt{m^2+k}-\left[\sqrt{m^2+k}\right]=\sqrt{m^2+k}-m.$$

„Gyöktelenítsük” ezt az alakot, bővítsünk a konjugáltjával:

$$a_{m,k}=\frac{m^2+k-m^2}{\sqrt{m^2+k}+m}=\frac{k}{\sqrt{m^2+k}+m}.$$

Innen valóban következik (1), hiszen most $m<\sqrt{m^2+k}<m+1$.

A bizonyítandó egyenlőtlenségek most már a kapott becslések összegzésével adódnak:

$$S_m>\sum_{k=1}^{2m}\frac{k}{2m+1}=\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{2m(2m+1)}{2}=m,\quad \text{illetve}$$
$$S_m<\sum_{k=1}^{2m}\frac{k}{2m}=\frac{1}{2m}\cdot\frac{2m(2m+1)}{2}=m+\frac{1}{2}.$$

Így

$$\sum_{m=1}^{n-1} m=\frac{n(n-1)}{2}<\sum_{m=1}^{n-1} S_m<\sum_{m=1}^{n-1}\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{n(n-1)+n-1}{2}=\frac{n^2-1}{2},$$

a bizonyítandó állítást kapjuk.

() *Tóth János* (Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A megoldások vagy a $\frac{k}{2m+1}<a_{m,k}=\left\{\sqrt{m^2+k}\right\}<\frac{k}{2m}$ egyenlőtlenségeket, vagy pedig az összegzésükkel adódó $m<S_m<m+\frac{1}{2}$ becsléseket igazolták a legkülönbözőbb módszerekkel. Az $m<S_m$ alsó becslést nem csak tagonként összegezve kaphatjuk meg, könnyen igazolható a számtani és a négyzetes közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is, illetve a $2m$ tagú S_m összeg tagjait szimmetrikusan csoportosítva az $1\le k\le m$ esetben teljesülő $1<\left\{\sqrt{m^2+k}\right\}+\left\{\sqrt{(m+1)^2-k}\right\}$ egyenlőtlenségek összegzésével is.

A felső becslésre kényegében csak ezt a módszert találták. Valamivel finomabb eszközökkel az $S_m<m+\frac{1}{6}$ eredmény is igazolható.