Megoldás. Jelölje a háromszög szögeit α, β, 2β, a csúcsait rendre A, B, C, a velük szemben lévő oldalakat pedig rendre a, b, c. Mivel $2\beta > \frac{\pi}{2}$, így $\beta > \frac{\pi}{4}$, azért $\alpha < \frac{\pi}{4}$, tehát $a < b < c$.

Írjuk fel a szinusz-tételt a c és a b oldalra:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta, \quad \text{amiből} \quad \cos\beta = \frac{c}{2b}.$$

A $\cos\beta$ kifejezhető a koszinusz-tétel segítségével is: $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. A kétféle kifejezést egybevetve kapjuk:

$$\frac{c}{2b} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Átrendezés, kiemelés után: $(a-b)c^2 - b(a+b)(a-b) = 0$. Mivel $a \neq b$, azért $c^2 = b(a+b)$. A háromszög oldalai pozitív egész számok, ezért b osztója c^2-nek. Ugyanakkor az utolsóként adódott összefüggésből:

$$c^2 = b(a+b) < 2b^2, \quad \text{azaz} \quad b < c < \sqrt{2}\cdot b.$$

Vizsgáljuk ennek az egyenlőtlenségnek megfelelően a lehetséges háromszögoldalakat a b növekvő sorrendben vett értékeiből kiindulva; figyeljünk közben a $b \mid c^2$ oszthatóságra is. Először $b = 9$ esetén találunk jó c értéket: $c = 12$. Ekkor

$$a = \frac{c^2-b^2}{b} = 7,$$

a háromszög kerülete pedig 28. Tovább növelve b értékét $b < 14$ esetén nem találunk további jó c értéket; ha pedig $b \geq 14$, akkor $c \geq 15$, vagyis a kerület biztosan nagyobb 28-nál.

A legkisebb kerületű „jó” háromszög oldalai tehát 7, 9, 12; kerülete pedig 28.

() *Bartha Ferenc* (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 12. évf.)

Megjegyzés: 1. A megoldás végi próbálkozások lerövidíthetőek, ha észrevesszük, hogy $b \mid c$ nem teljesülhet (hiszen c hossza a b oldal hosszának egyszerese és kétszerese közé esik), de $b \mid c^2$-nek teljesülnie kell. Ez azt jelenti, hogy b-nek biztosan van olyan prímosztója, ami legalább második hatványon szerepel, vagyis a b nem négyzetmentes szám, így $b \in \{4; 8; 9; 12; \dots\}$.

2. A megoldás elején is alkalmazhatunk más módszert. Egy elemibb út a következő: Mivel $2\beta > \frac{\pi}{2}$, így $\beta > \frac{\pi}{4}$, azaz $\alpha < \frac{\pi}{4}$ és $a < b < c$. Húzzuk be a háromszög tompaszögének szögfelezőjét. (Ez messe az AB oldalt a D pontban.) Ez két háromszögre bontja az eredeti háromszöget, melyek közül az egyik ($ADC\triangle$) a szögei alapján hasonló az eredetihez. A szögfelező-tétel segítségével kapjuk, hogy $AD = \frac{bc}{a+b}$. Írjuk fel a két hasonló háromszög megfelelő (a két hosszabb) oldalainak arányát: $\frac{bc}{a+b} : b = b : c$. Ebből átrendezés után a $c^2 = b(a+b)$ összefüggést kapjuk.

3. Sokan megtalálták a legkisebb kerületű háromszöget, de nem mutatták meg pontosan, miért ez a legkisebb; illetve néhányan olyan háromszöget találtak, amely nem tompaszögű. Ezek a dolgozatok 3; illetve 2 pontot kaptak.