Megoldás. Vezessük be azt a sorozatot, amit a következő rekurzió definiál: $x_1 \geq 0{,}75$ valós szám, és ha $n > 1$, akkor

$$x_n = \sqrt{-3 + 4x_{n-1}}.$$

A feladat x_1 azon értékeinek megadása, amelyekre $x_1 = x_4$.

Vizsgáljuk meg az x_n sorozatot monotonitás szempontjából. Az x_n sorozat szigorúan monoton növekszik, ha minden n esetén $x_n > x_{n-1}$, azaz ha

$$\sqrt{-3 + 4x_{n-1}} > x_{n-1}.$$

A sorozat képzési szabályából következik, hogy minden tagja pozitív, így az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelhetjük:

$$-3 + 4x_{n-1} > x_{n-1}^2,$$
$$0 > x_{n-1}^2 - 4x_{n-1} + 3,$$
$$0 > (x_{n-1} - 1)(x_{n-1} - 3).$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat pontosan akkor szigorúan monoton növő, ha minden $n > 1$-re $1 < x_{n-1} < 3$. Ezt a feltételt elég $n = 2$-re megkövetelni; ha ugyanis valamilyen k-ra $1 < x_{k-1} < 3$ teljesül, akkor

$$1 = \sqrt{-3 + 4 \cdot 1} < \sqrt{-3 + 4x_{k-1}} = x_k < \sqrt{-3 + 4 \cdot 3} = 3$$

is fennáll. Tehát a sorozat akkor és csak akkor lesz szigorúan monoton növő, ha $1 < x_1 < 3$. Ugyanígy látható be az is, hogy ha $0{,}75 \leq x_1 < 1$ vagy $3 < x_1$, akkor a sorozat szigorúan monoton fogyó (vagy – az előbbi esetben – esetleg valameddig szigorúan fogy, majd az éppen soron következő $-3 + 4x_t$ negatívvá válása miatt „megáll", vagyis a többi tagja már nem értelmezett). Tehát ha $x_1 = x_4$, akkor ez csak $x_1 = 1$ vagy $x_1 = 3$ esetén teljesülhet.

Ha $x_1 = 1$, akkor $x_2 = \sqrt{-3 + 4 \cdot 1} = 1$, ez azt jelenti, hogy – a sorozat képzési szabálya miatt – a sorozat minden tagja 1. Ha $x_1 = 3$, akkor $x_2 = \sqrt{-3 + 4 \cdot 3} = 3$, vagyis a sorozat minden tagja 3. Tehát az egyenlet megoldásai: $x = 1$ és $x = 3$.

Megjegyzés: A levezetésből következik, hogy az

$$x = \sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{\ldots\sqrt{-3 + 4x}}}}$$

alakú egyenleteknek (melyekben k darab négyzetgyökjel szerepel) szintén csak az $x = 1$ és $x = 3$ a megoldása.

() *Poronyi Balázs* (Pécs, Janus Pannonius Gimnázium, 10. évf.)