I. megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az A csúcs legyen az origó, az x, y, z tengelyek illeszkedjenek rendre a B, D, E pontokra, az egységet pedig válasszuk a kocka élhossza egytizedének. Ekkor az egyes pontok koordinátái: $B(10;0;0)$, $D(0;10;0)$, $M(5;5;0)$, $E(0;0;10)$.

A P pont pontosan akkor van rajta az AB, a Q pont pedig az EM egyenesen, ha léteznek olyan t, illetve s valós számok, melyekre

$$\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AB},\quad \text{illetve}\quad \overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}+s\cdot\overrightarrow{EM}.$$

Tehát a P és Q pontok koordinátái a t és s paraméterek segítségével kifejezve: $P(10t;0;0)$, $Q(5s;5s;10-10s)$. Tehát

$$PQ^2=(10t-5s)^2+(5s)^2+(10-10s)^2.$$

Ismert, hogy a két egyenes távolsága megegyezik a PQ távolságok minimumával. Rögzített s érték esetén PQ nyilván akkor a legkisebb, ha $10t=5s$, azaz ha $t=s/2$. Ebben az esetben

$$PQ^2=(5s)^2+(10-10s)^2=\left(5\sqrt5 s-4\sqrt5\right)^2+20.$$

Ez a kifejezés akkor minimális, ha $s=0{,}8$, vagyis a PQ távolság akkor a legkisebb, ha $s=0{,}8$ és $t=0{,}4$. Ekkor a P, illetve a Q pont koordinátái: $P(4;0;0)$, $Q(4;4;2)$.

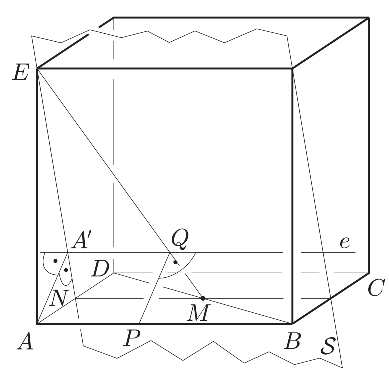
A P pont tehát az a pont, amely az AB szakaszt $2:3$ arányban osztja, Q pedig az ME szakaszt $1:4$ arányban osztó pont.

() *Birkus Róbert,* Galánta, Kodály Z. Gimn., 11. évf. dolgozata alapján

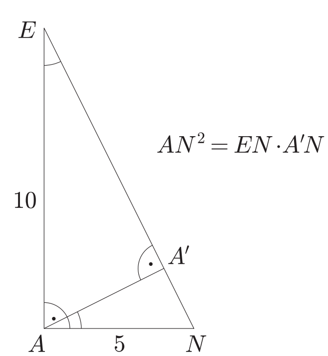
II. megoldás. Ha az AD él felezőpontját N-nel jelöljük, akkor az AB egyenes nyilván párhuzamos az E, M és N pontokra illeszkedő $\mathcal{S}$ síkkal. Az AB egyenes merőleges vetülete $\mathcal{S}$-en egy olyan e egyenes, mely AB-vel párhuzamos és áthalad az A pont EN egyenesre eső A' merőleges vetületén, hiszen az AEN sík merőleges az $\mathcal{S}$ síkra és az AB egyenesre is (*1. ábra*). Az AB él hosszát 10 egységnyinek tekintve $AN=5$, és a Pitagorasz-tétel alapján $EN=5\sqrt5$, valamint $EM=5\sqrt6$. Az AEN derékszögű háromszögben (*2. ábra*) a befogótétel szerint $AN^2=EN\cdot A'N$, tehát

$$A'N=\frac{5^2}{\left(5\sqrt5\right)}=\sqrt5,$$

és ezért $EA'=4\sqrt5$.



1. ábra



2. ábra

Ismert, hogy a PQ távolság pontosan akkor egyezik meg az AB és EM egyenesek távolságával, ha PQ merőleges mindkét egyenesre. Ezért a Q pont éppen az e egyenes EM egyenessel alkotott metszéspontja, P pedig Q merőleges vetülete az AB egyenesre. Az ENM és $EA'Q$ derékszögű háromszögek középpontosan hasonlóak, ezért

$$EQ = \left(\frac{EA'}{EN}\right) \cdot EM = 4\sqrt{6} \quad \text{és} \quad A'Q = \left(\frac{EA'}{EN}\right) \cdot NM = 4.$$

A Q pont tehát az EM szakaszt $4:1$ arányban osztó pont, P pedig az AB szakaszt $2:3$ arányban osztja, mert az $APQA'$ négyszög téglalap, tehát

$$AP = A'Q = 4.$$