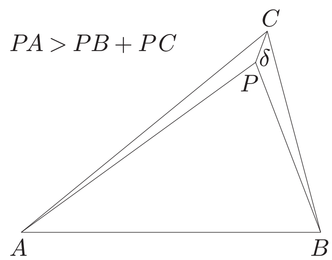
Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a háromszög nem szabályos. Ekkor van két különböző hosszúságú oldala. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = BC < AC = b$. Legyen $b - a = \varepsilon$, P pedig olyan pont a háromszög belsejében, melynek a C csúcstól való távolsága, $PC = \delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ (*1. ábra*). A BCP háromszögre felírva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $PB < PC + CB = a + \delta$. Hasonlóképpen az ACP háromszögből kapjuk, hogy $AC < AP + PC$, vagyis $PA > AC - CP = b - \delta$. Ekkor azonban

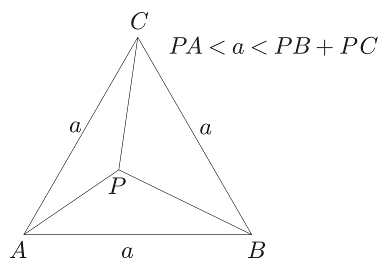
$$PA - PB > (b - \delta) - (a + \delta) = \varepsilon - 2\delta \ge \delta = PC,$$

tehát $PA > PB + PC$, és ezért a PA, PB, PC szakaszokból nem szerkeszthető háromszög. Ez az ellentmondás igazolja, hogy ABC csak szabályos háromszög lehet.



1. ábra

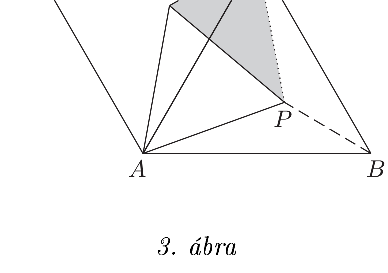
Meg kell még mutatnunk, hogy ha ABC szabályos háromszög, akkor a PA, PB, PC szakaszokból mindig szerkeszthető háromszög. Legyen $a = AB = BC = CA$. Ismert, hogy egy háromszögben lévő szakasz rövidebb, mint a háromszög leghosszabb oldala (ennek bizonyítását lásd pl.: *Geometriai feladatok gyűjteménye I.,* 170. feladat), esetünkben tehát a PA, PB, PC szakaszok mindegyike rövidebb, mint a. Másrészt viszont az APB, BPC és a CPA háromszögekből (*2. ábra*) a háromszög-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy a szakaszok közül bármelyik kettő együttesen hosszabb, mint a. Tehát a PA, PB, PC szakaszokból mindig szerkeszthető háromszög.



2. ábra

() *Backhausz Ágnes* (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.) dolgozatát felhasználva

Megjegyzés. Ha az ABC háromszög szabályos, akkor belső P pontokra egy jól ismert fogással meg is szerkeszthető a PA, PB, PC oldalú háromszög. Forgassuk el az A körül az ABC háromszöget $+60°$-kal. Ha P képe P', akkor az APP' háromszög szabályos, tehát $PP' = PA$. Másfelől a B elforgatottja C, azért $PB = P'B' = P'C$. A PCP' háromszög tehát megfelel a feltételeknek, oldalai $PC, PA = PP'$ és $PB = P'C$.



3. ábra