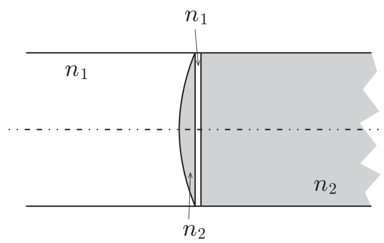
I. megoldás. Képzeljük el, hogy az n_1 törésmutatójú közegben a tengelyen, a gömbfelülettől t távolságban egy pontszerű tárgy található. Határozzuk meg először, hol keletkezik kép erről a tárgyról!

Bontsuk fel gondolatban az n_2 törésmutatójú közeget egy, a tengelyre merőleges síkkal két részre: egy síkdomború, vékony lencsére, valamint egy síklappal határolt térrészre. Helyezzünk a két rész közé – ugyancsak gondolatban – n_1 törésmutatójú anyagból készült, elhanyagolható vastagságú plánparalel lemezt (*1. ábra*). (Ez a lemez nem változtatja meg a fénysugarak haladási irányát, csak párhuzamosan eltolja azokat, de mivel a vastagsága nagyon kicsi, ezt az eltolódást is figyelmen kívül hagyhatjuk.)



1. ábra

Az n_2 törésmutatójú anyagból készült, n_1 törésmutatójú környezetben elhelyezkedő síkdomború lencse fókusztávolsága az

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\frac{1}{R}$$

képletből számítható, tehát

$$f = \frac{R\,n_1}{n_2 - n_1}. \tag{1}$$

Ez a lencse (ha mindkét oldalát teljes terjedelmében n_1 törésmutatójú közeg töltené ki) a t távolságban levő tárgyról bizonyos k_1 távolságban alkotna képet. A lencsetörvény szerint

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}, \tag{2}$$

innen k_1 kiszámítható. A lencséből kilépő fénysugarak azonban csak egy rövid szakaszon haladnak az n_1 törésmutatójú közegben, majd a plánparalel lemez túlsó szélén megtörve nem k_1, hanem attól eltérő k távolságban metszik az optikai tengelyt, ott alkotnak képet (*2. ábra*). A Snellius–Descartes-törvény szerint

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

A *2. ábráról* leolvasható továbbá, hogy

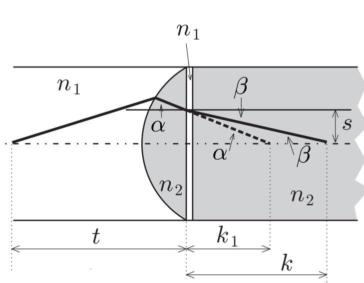
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s}{k_1}, \quad \text{illetve} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{s}{k}.$$

Kis szögek (az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarak) esetén alkalmazható a $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$ és a $\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta$ közelítés, így

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{k}{k_1},$$

ahonnan (a vizsgált közelítésben) $k_1 = n_2k/n_1$. Ezt a (2) lencsetörvénybe helyettesítve és (1)-et is felhasználva a következő általánosított leképezési törvényt kapjuk:

$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{k} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \tag{3}$$



2. ábra

Térjünk most vissza az eredeti feladathoz, vagyis annak vizsgálatához, hogy milyen esetben haladhatnak a megtört fénysugarak a tengellyel párhuzamosan. Ha a fénysugarak az n_1 törésmutatójú közegből indultak, és majdnem párhuzamosan haladnak tovább ($k \to \infty$, azaz $1/k \to 0$), a (3) összefüggés szerint

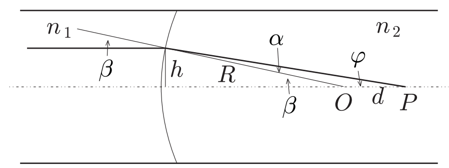
$$t = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R.$$

Ha viszont az n_2 törésmutatójú közegből indulnak, és a másik közegben haladnak párhuzamosan tovább, akkor – a sugármenetek megfordíthatóságának elvét alkalmazva – (3)-ban a $t \to \infty$, azaz $1/t \to 0$ határátmenetet kell vizsgálnunk. Ehhez

$$k = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

fényforrás-távolság tartozik.

A feladat követelményének megfelelő pont csak akkor létezik, ha $n_2 > n_1$ (hiszen a fentebb kiszámított t, illetve k pozitív kell legyen), ekkor viszont kettő is eleget tesz a kívánt feltételnek. () *Szilágyi Péter* (Debreceni Egyetem Kossuth L. Gyak. Gimn., 10. o.t.)



3. ábra

II. megoldás. Tételezzük fel, hogy a fény az n_2 törésmutatójú közegből, a gömb O középpontjától d távolságra levő P pontból indul, majd a másik közegben a tengellyel párhuzamosan halad tovább (*3. ábra*). Mivel β külső szög, $\beta > \alpha$, ahonnan hegyesszögekre $\sin\beta > \sin\alpha$, továbbá

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_2}{n_1},$$

így tehát a vizsgált sugármenet csak $n_2 > n_1$ esetén teljesülhet. Az ábráról leolvasható, hogy (a kicsiny szögekre érvényes közelítésben)

$$\beta \approx \frac{h}{R}, \qquad \varphi \approx \frac{h}{R+d},$$

továbbá

$$\alpha = \beta - \varphi \quad \text{és} \quad \frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n_2}.$$

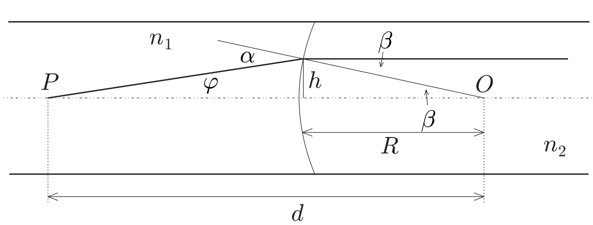
Ezekből az összefüggésekből

$$d = R\frac{n_1}{n_2 - n_1},$$

azaz a fényforrás és a közeghatár távolsága

$$R + d = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

kell legyen.



4. ábra

Hasonló módon vizsgálható az az eset is, amikor a fényforrás az n_1 törésmutatójú közegben található (a gömb középpontjától d távolságban), és a belőle kiinduló fénysugarak a másik közegben haladnak párhuzamosan (*4. ábra*). Most α a külső szög, $\alpha > \beta$, tehát $\sin\alpha > \sin\beta$, így ismét $n_2 > n_1$ a megoldhatóság feltétele. Az ábra szerint (ismét csak kicsiny szög közelítésben)

$$\beta \approx \frac{h}{R}, \qquad \varphi \approx \frac{h}{d-R},$$

továbbá
$$\alpha=\beta+\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{\alpha}{\beta}\approx\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}.$$
Innen kapjuk, hogy
$$d=R\,\frac{n_2}{n_2-n_1},$$
azaz a fényforrás és a közeghatár távolsága
$$d-R=\frac{n_1}{n_2-n_1}\,R$$
kell legyen.

()

Sándor Nóra Katalin (Pápai Ref. Koll. Gimn., 11. o.t.)