I. megoldás. Az abszolút értéken belül szereplő polinom páratlan együtthatójú tagjait az alábbi átalakítással két tagra bontjuk:

$$(2n+1)x^m = nx^m + (n+1)x^m.$$

Így

$$x^{1000} + 2x^{999} + \left(x^{998} + 2x^{998}\right) + 4x^{997} + \left(2x^{996} + 3x^{996}\right) + \dots +$$
$$+(499x^2 + 500x^2) + 1000x + 500 + 501 =$$
$$= \left(x^{1000} + 2x^{999} + x^{998}\right) + 2\left(x^{998} + 2x^{997} + x^{996}\right) + \dots +$$
$$+500(x^2 + 2x + 1) + 501 =$$
$$= \left(x^{500} + x^{499}\right)^2 + 2\left(x^{499} + x^{498}\right)^2 + \dots + 500(x+1)^2 + 501.$$

Eszerint

$$f(x) = \left|\left(x^{500} + x^{499}\right)^2 + 2\left(x^{499} + x^{498}\right)^2 + 3\left(x^{498} + x^{497}\right)^2 + \dots + 500(x+1)^2 + 501\right|.$$

Az abszolút értéken belül mindig pozitív érték szerepel, a négyzetes tagok mind ugyanott, (-1)-ben veszik fel legkisebb értéküket, a 0-t. (Az utolsó tag kivételével a 0 is közös minimumhely.) Így $f(x)$ minimuma $x=-1$-ben van, és ott 501-gyel egyenlő.

() *Révész Dániel* (Kisvárda, Bessenyei György Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat általánosan, 1000 helyett tetszőleges páros számra ugyanígy oldható meg.

II. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Belátjuk, hogy páros n esetén az $f_n(x) = (n+1) + nx + \dots + 2x^{n-1} + x^n$ kifejezés

1. minden x-re pozitív,
2. minimumhelye kizárólag a -1,
3. minimuma $\dfrac{n}{2} + 1$.

Ha $n=2$, akkor $f_2(x) = 3 + 2x + x^2 = (x+1)^2 + 2$. A minimumhelye a -1, minden x-re pozitív, valamint $f(-1) = 2$. Tegyük fel, hogy az indukciós állítások $2k$-ig minden páros számra teljesülnek. Most bebizonyítjuk azokat $n = (2k+2)$-re.

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= (n+1) + nx + (n-1)x^2 + \dots + 2x^{n-1} + x^n = \\
&= (n+1) + nx + x^2\left((n-1) + (n-2)x + \dots + 2x^{n-3} + x^{n-2}\right) = \\
&= (n+1) + nx + x^2 \cdot f_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $f_{n-2} \ge \dfrac{n}{2}$, tehát

$$f_n(x) \ge (n+1) + nx + \frac{n}{2}x^2 = \frac{n}{2}(x+1)^2 + \frac{n}{2} + 1.$$

A jobb oldali függvénynek a minimumhelye $x=-1$, itt (és csakis itt) egyenlőség áll fenn, ezért magának az $f_n(x)$ függvénynek is csak az $x=-1$ a minimumhelye, továbbá $f_n(-1) = \dfrac{n}{2} + 1$. Ezzel beláttuk a 2. és a 3. indukciós állítást. Marad még az 1. igazolása – ez azonban nyilvánvaló, hiszen f_n minimumértéke pozitív. Eszerint a feladatban szereplő kifejezésben az abszolút érték jele elhagyható.

Az eredeti függvény ($f = |f_{1000}| = f_{1000}$) legkisebb értéke $\dfrac{1000}{2} + 1 = 501$.

() *Juhász Máté Lehel* (Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

III. megoldás. Jelölje $g(x)$ az $1001 + 1000x + 999x^2 + \dots + 2x^{999} + x^{1000}$ polinomfüggvényt, ezzel $f(x) = \left|g(x)\right|$. A g függvény a nemnegatív számokon szigorúan monoton nő, és $g(0) = 1001$. Ha g-nek van ennél kisebb értéke, azt csak negatív helyen veheti fel. A minimumhelyen a függvény deriváltja 0.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 1000 + 2\cdot 999x + 3\cdot 998x^2 + \dots + 998\cdot 3x^{997} + 999\cdot 2x^{998} + 1000x^{999} = \\
&= 1000(x^{999}+1) + 2\cdot 999x(x^{997}+1) + 3\cdot 998x^2(x^{995}+1) + \dots + \\
&\quad +500\cdot 501x^{499}(x+1).
\end{aligned}$$

A zárójelben szereplő kifejezések mindegyike osztható $(x+1)$-gyel, ezért a derivált $(x+1)h(x)$ alakú. Így $g'(-1) = 0$, tehát (-1)-ben lehet g-nek szélsőértéke. Azt, hogy ez valóban minimumhely, úgy látjuk be, hogy bebizonyítjuk, hogy $g(x)$ minden (-1)-től különböző (negatív) számra nagyobb $g(-1) = 501$-nél.

Írjuk fel g-t más formában:

$$\begin{array}{rcccccccccl}
g(x) = x^{1000} & +x^{999} & +x^{998} & +x^{997} & +\dots & +x^2 & +x & +1 & + \\
 & +x^{999} & +x^{998} & +x^{997} & +\dots & +x^2 & +x & +1 & + \\
 & & +x^{998} & +x^{997} & +\dots & +x^2 & +x & +1 & + \\
\vdots & & & & & & & & \\
 & & & & & +x^2 & +x & +1 & + \\
 & & & & & & +x & +1 & + \\
 & & & & & & & +1. &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x^{1001}-1}{x-1} + \frac{x^{1000}-1}{x-1} + \dots + \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x-1}{x-1} = \\
&= \frac{x^{1001}+x^{1000}+x^{999}+\dots+x^2+x-1001}{x-1} = \\
&= \frac{\frac{x^{1002}-1}{x-1}-1002}{x-1} = \frac{x^{1002}-1-1002x+1002}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Ebből tehát

$$g(x) = \frac{x^{1002}-1002x+1001}{(x-1)^2}.$$

Tudjuk, hogy $g(-1)=501$. Bebizonyítjuk, hogy minden más (negatív) x-re $g(x)>501$, azaz

$$501 < \frac{x^{1002}-1002x+1001}{(x-1)^2}, \qquad x \neq -1.$$

Lévén, hogy negatív x-ekre $(x-1)^2>0$, a bizonyítandó összefüggés az alábbival ekvivalens:

$$501(x-1)^2 < x^{1002}-1002x+1001, \quad \text{azaz}$$

$$501x^2-1002x+501 < x^{1002}-1002x+1001$$

$$x^2 < \frac{x^{1002}+500}{501}.$$

Írjuk föl a nemnegatív $a_1=x^{1002}$, $a_2=a_3=\dots=a_{500}=1$ mennyiségekre a számtani és a mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$x^2 = \sqrt[501]{x^{1002}} \le \frac{x^{1002}+1+1+\dots+1}{501},$$

ebből következik a bizonyítandó állítás.

Tehát az $f(x)$ függvényben az abszolút érték jele elhagyható, az egyetlen minimumhelye a -1, a minimum értéke pedig 501.

() *Farkas Balázs* (Eger, Neumann János Gimn. és Szki., 11. o.t.) dolgozata alapján