Megoldás. Az élekre vonatkozó feltételt egyetlen kockára alkalmazva kapjuk, hogy a három adott egyenes egymásra páronként merőleges, és ezért valamennyi kocka egyállású. Kockák helyett általánosabban téglatestekre bizonyíthatunk. Megállapíthatjuk, hogy akárhány egyállású téglatest közös része is téglatest, ami azonban esetleg elfajuló (téglalap, szakasz, egy pont, vagy az üres halmaz). Vegyünk föl a térben egy olyan derékszögű koordinátarendszert, amelynek tengelyei a megadott egyenesekkel párhuzamosak. Egy, a tengelyekkel azonos állású téglatest pontosan akkor nem elfajuló, ha mindhárom tengelyen egy-egy nemnulla hosszúságú szakasz a merőleges vetülete. Tekintsük a koordinátatengelyek egyikét, jelöljük e-vel. Mivel bármelyik két téglatestnek van közös belső pontja, azért közös részüknek az e-re való vetülete valódi szakasz; ez a szakasz nem más, mint a két téglatest vetületének – két szakasznak – a közös része. A 100 téglatest e-re való merőleges vetülete tehát 100 olyan szakasz ezen az egyenesen, amelyek közül bármelyik kettőnek a metszete valódi szakasz.

Megmutatjuk, hogy ekkor az összes szakasz közös része is valódi szakasz. (Ez lényegében az egyenesre vonatkozó ún. *Helly-tétel.*) Irányítsuk az e egyenest; ennek megfelelően beszélhetünk rajta „bal” és „jobb” haladási irányról, ill. egy szakasz kezdő- és végpontjáról. Tekintsük ezek után a szakaszok közül azt (ill. az egyik olyat), amelynek A kezdőpontjához képest az összes többi szakasz kezdőpontja vagy A-tól balra fekszik, vagy pedig megegyezik A-val. Hasonlóan tekintsük azt a szakaszt, amelynek B végpontjától az összes többi szakasz végpontja jobbra esik, vagy egyenlő B-vel. A két szakasz közös része éppen az AB szakasz, ami a feltételek szerint valódi, és látható, hogy valamennyi szakasznak része. Ezzel beláttuk, hogy a 100 téglatest közös részének az e-re (azaz bármelyik koordinátatengelyre) eső merőleges vetülete valódi szakasz, így a közös rész egy valódi (azaz belső ponttal rendelkező) téglatest.

Rátérve a feladat második részére, tekintsünk először egy tetraédert és állítsunk minden lapjára kifelé egy-egy olyan nagy kockát, hogy annak a tetraéderre fekvő lapja belsejében tartalmazza a tetraéder három csúcsát. Nem nehéz meggyőződni arról, hogy a négy kocka közül bármely háromnak van közös belső pontja, mind a négynek azonban nincs. Ezek után valamelyik kockának még 97 példányát tekintve a kívánt tulajdonsággal rendelkező 100 kockához jutunk.

() *Eckert Bernadett* (Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn., 10. évf.), *Farkas 137 Balázs* (Eger, Neumann János Gimn. és Szki., 11. évf.)

Megjegyzés. A (3-dimenziós) térre érvényes Helly-tétel a következőt állítja: Ha véges sok korlátos, konvex ponthalmaz közül bármelyik négynek van közös belső pontja, akkor az összes halmaznak is létezik közös belső pontja. A megoldás első fele szerint speciális alakú és elhelyezkedésű halmazok (pl. egyállású téglatestek) esetén a feltételben szereplő 4 csökkenthető, viszont a megoldás második felében megadott ellenpélda mutatja, hogy 4 helyett 3-ra már nem igaz (általánosan) a tétel állítása.