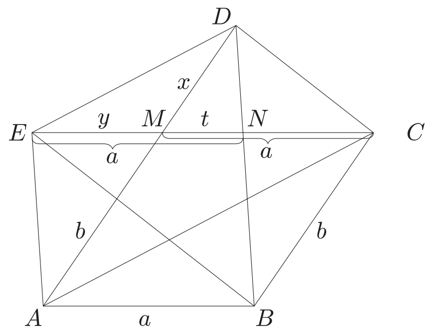
Megoldás. Jelölje az ötszög csúcsait valamely körüljárás szerint sorban A, B, C, D, E, legyen M és N az EC átlónak az AD, illetve BD átlókkal való metszéspontja, továbbá vezessük be az $AB = a$, $BC = b$, $DM = x$, $EM = y$ jelöléseket (*1. ábra*).



1. ábra

Ekkor az oldalak és az átlók párhuzamosságából következik, hogy az $ABCM$ és $ABNE$ négyszögek paralelogrammák. Ezért $AM = b$, $EN = MC = a$, és így $MN = t = a - y$. Az AMC és DME háromszögek hasonlóak, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. Ezért megfelelő oldalaik aránya is megegyezik, tehát $x : b = y : a$. Ugyanígy kapjuk az AME és DMN háromszögek hasonlóságából, hogy $x : b = t : y$. A két egyenlőségből $y^2 = at$, vagyis $y^2 = a(a - y)$ adódik. Ezt a másodfokú egyenletet megoldva kapjuk, hogy $y = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$. Mivel $y > 0$, az AB oldal és a vele párhuzamos EC átló arányára

$$AB : EC = a : (y + a) = a : \frac{(1 + \sqrt{5})a}{2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Nyilván ugyanez az aránya bármelyik oldal és az azzal párhuzamos átló hosszának is. A feltételeknek eleget tevő ötszögek léteznek is, pl. a szabályos ötszög ilyen.

Megjegyzés. Sokan megpróbálták bebizonyítani, hogy feltételeinkből az ötszög szabályos mivolta következik. Ez azonban nem igaz. A feladat feltételeinek nem csak a szabályos ötszög, hanem valamennyi *affin szabályos ötszög* is eleget tesz. Ezekről a sokszögekről az érdeklődő olvasó *Reiman István: A geometria és határterületei* c. könyvének 12. fejezetében található részletes leírást.