I. megoldás. Ismeretes, hogy ha a és b egész számok, n pedig pozitív egész, akkor a^n-b^n osztható $(a-b)$-vel. Ebből következik, hogy ha

$$f(x)=c_kx^k+\dots+c_1x+c_0$$

egész együtthatós polinom, továbbá a és b egész számok, akkor $f(a)-f(b)=c_k(a^k-b^k)+\dots+c_1(a-b)$ osztható $(a-b)$-vel. Tegyük fel, hogy f minden pozitív egészre 2-hatvány értéket vesz fel; legyen $f(1)=2^r$. Mivel $f-2^r$ – akárcsak f – legfeljebb k-adfokú és nem konstans, azért nem lehet k-nál több gyöke. Ezért $f(x)$ legfeljebb k helyen veheti fel a 2^r értéket, tehát van olyan L küszöbérték, hogy $f(v)\neq 2^r$, ha $v>L$. Legyen m olyan természetes szám, amelyre $m\geq r+1$ és $a=2^m+1>L$. Ekkor az f-re tett feltevésünk szerint $f(a)=2^t$, ahol $t\neq r$; jelölje q a t és r számok közül a kisebbiket. Nyilván $2^t-2^r=2^q(2^{t-q}-2^{r-q})$ második tényezője páratlan, így 2^t-2^r nem osztható 2^{q+1}-nel. Másrészt viszont $2^t-2^r=f(a)-f(1)$ osztható $a-1=2^m$-nel, tehát ($m\geq r+1\geq q+1$ miatt) 2^{q+1}-nel is, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy nem létezik a feladat követelményeit kielégítő polinom.

A következő megoldás – oszthatóság helyett a függvényvizsgálat módszerére és a határérték fogalmára építve – messzemenően általánosítja az eredeti feladatot.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $P_n(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ olyan n-ed fokú, valós együtthatós polinom, amely minden pozitív egész helyen 2-hatvány – tehát pozitív – értéket vesz föl; ezért főegyütthatója is pozitív. Ekkor egy elég nagy k_0 pozitív számtól kezdve a függvény szigorúan monoton növekedő. Így:

$$\text{Ha}\quad k>k_0,\quad \text{akkor}\quad \frac{P(k+1)}{P(k)}=2^m\geq 2, \tag{1}$$

ahol m (k-tól függő) pozitív egész szám.

Vizsgáljuk meg a $\dfrac{P(k+1)}{P(k)}$ sorozat határértékét, ha k tart a végtelenbe. Ha k^n-nel osztjuk a számlálót is és a nevezőt is:

$$\frac{\frac{P_n(k+1)}{k^n}}{\frac{P_n(k)}{k^n}}=\frac{\frac{a_n(k+1)^n}{k^n}+\dots+\frac{a_1(k+1)}{k^n}+\frac{a_0}{k^n}}{\frac{a_nk^n}{k^n}+\dots+\frac{a_1k}{k^n}+\frac{a_0}{k^n}},$$

ahol a számláló első tagja a_n-hez, a többi tagja pedig nullához tart. A nevezőben levő tagok hasonlóan viselkednek. Ezért a $\dfrac{P(k+1)}{P(k)}$ sorozat határértéke 1. Ez azonban ellentmondás, hiszen (1) miatt $\dfrac{P(k+1)}{P(k)}$ 2-nél kisebb értéket nem vehet fel. Tehát nincs olyan nem konstans valós együtthatós polinom sem, amely minden pozitív egész helyen 2-hatvány értéket venne föl (ill. általánosabban: az értékeit egy olyan szigorúan monoton növő sorozat elemei közül venné fel, amelyben minden tag az előzőnek legalább d-szerese, ahol d egy 1-nél nagyobb konstans).

() *Révész Dániel* (Kisvárda, Bessenyi György Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján