I. megoldás. Az

$$x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2$$

azonosság felhasználásával a feltételt $3(a+b)^2+(a-b)^2=3(c+d)^2+(c-d)^2$ alakba írhatjuk.

Rendezés és szorzattá alakítás után innen

$$3(a+b+c+d)(a+b-c-d)+(a+c-b-d)(a+d-b-c)=0$$

adódik. Ha s a megadott egyenlőséget teljesítő a, b, c, d pozitív egészek összege, akkor az átrendezett feltétel a

$$3s(s-2c-2d)+(s-2b-2d)(s-2b-2c)=0$$

alakot ölti, s hatványai szerint rendezve:

$$4s^2-(4b+8c+8d)s+4(b+d)(b+c)=0.$$

Mivel egész számokról van szó, innen következik, hogy s osztója a $4(b+d)(b+c)$ szorzatnak.

Ha s prímszám, akkor osztania kell ennek a szorzatnak valamelyik tényezőjét is. Mivel az adott számok pozitívak, azért $0<b+d$, $b+c<s$, ezeket a tényezőket s nem oszthatja. Így ha s prímszám, akkor csak $s\mid 4$ teljesülhet. Ez viszont nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen 4 egyetlen prímosztója 2, viszont négy pozitív egész összegeként s legalább 4.

Ez azt jelenti, hogy s valóban nem lehet prímszám.

() *Hartmann Zoltán* (Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Végezzük el az adott egyenlőségben az $a=\dfrac{u+v}{2}$, $b=\dfrac{u-v}{2}$, illetve a $c=\dfrac{x+y}{2}$, $d=\dfrac{x-y}{2}$ helyettesítéseket. Ekkor $u=a+b$, $v=a-b$, illetve $x=c+d$ és $y=c-d$, az új változók egész számok, továbbá

$$s=a+b+c+d=u+x.$$

A helyettesítések után a bal oldal

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=\frac{3u^2+v^2}{4},$$

a jobb oldal pedig hasonlóan $\dfrac{3x^2+y^2}{4}$. Az így adódó egyenlőséget rendezve

$$3(u+x)(u-x)=(y+v)(y-v)$$

adódik, $s=u+x$ tehát osztója az $(y+v)(y-v)$ szorzatnak. Ha pedig az s prímszám, akkor osztania kell ennek a szorzatnak valamelyik tényezőjét. Azonban

$$-s=-a-b-c-d<y+v=a-b+c-d<a+b+c+d=s,$$

tehát $|y+v|<s$, és ugyanígy kapjuk, hogy $|y-v|<s$.

Mindkét tényező abszolút értéke tehát határozottan kisebb, mint s; az s prím esetére talált oszthatóság eszerint csak úgy teljesülhet, ha a szóban forgó tényező értéke nulla. Így viszont a szorzat és a vele egyenlő bal oldal, $3(u+x)(u-x)$ is nulla. Ez utóbbi pedig pontosan akkor teljesül, ha $u=x$, az s tehát páros szám, és így valóban nem lehet prím, hiszen az értéke legalább 4.

III. megoldás. A fenti jelölésekkel nyilván $a+b\equiv-(c+d)\pmod s$, amit négyzetre emelve

$$(a+b)^2\equiv(c+d)^2\pmod s$$

adódik. Alakítsuk át a feltétel egyenlőségének két oldalán álló mennyiségeket az

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-y(x+y)+y^2$$

azonosság, illetve a kapott kongruenciák felhasználásával:

$$\begin{aligned}(a+b)^2-b(a+b)+b^2=(c+d)^2-d(c+d)+d^2\equiv\\ \equiv(a+b)^2+d(a+b)+d^2\pmod s.\end{aligned}$$

Innen rendezés után kapjuk, hogy

$$(d+b)(a+b)+d^2-b^2=(d+b)(a+d)\equiv0\pmod s,$$

azaz s osztója a $T=(d+b)(a+d)$ szorzatnak. Mivel $s=a+b+c+d$ és a megadott számok pozitív egészek, azért T mindkét tényezője kisebb s-nél, amely így egyiküknek sem lehet osztója. Ebből pedig következik, hogy s valóban nem prímszám.

() *Pálvölgyi Dénes* (Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján