I. megoldás. Vizsgáljuk meg, mikor teljesül a feladat feltétele egy adott α számra, azaz mit jelent az, hogy $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\alpha$. Ehhez általában számoljuk ki $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)$ értékét. Mivel a feladat $f\big(f\big(f(1)\big)\big)$ értékéről beszél, azért számolás közben föltesszük, hogy valamennyi mennyiség értelmes, az előforduló nevezők egyike sem nulla.

$$f\big(f(\alpha)\big)=f\left(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\right)=\frac{a\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}+b}{c\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}+d}.$$

Bővítés és rendezés után

$$f\big(f(\alpha)\big)=\frac{(a^2+bc)\alpha+b(a+d)}{c(a+d)\alpha+(bc+d^2)}.$$

Ebbe helyettesítve $f(\alpha)$ értékét:

$$f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\frac{(a^2+bc)f(\alpha)+b(a+d)}{c(a+d)f(\alpha)+(bc+d^2)}=\frac{(a^2+bc)\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}+b(a+d)}{c(a+d)\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}+(bc+d^2)}.$$

Ismét bővítve és rendezve

$$f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\frac{\big[a(a^2+bc)+bc(a+d)\big]\alpha+b\big[(a^2+bc)+d(a+d)\big]}{c\big[a(a+d)+(bc+d^2)\big]\alpha+\big[bc(a+d)+d(bc+d^2)\big]}.$$

Az $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\alpha$ egyenlőséget a bal oldal imént kapott tört alakjának a nevezőjével szorozva és α hatványai szerint rendezve kapjuk, hogy:

$$(1)\qquad \big[c(a^2+ad+d^2+bc)\big]\alpha^2-[a^3+abc-bcd-d^3]\alpha-b(a^2+bc+da+d^2)=0.$$

Vegyük észre, hogy α együtthatója szorzattá alakítható:

$$a^3+abc-bcd-d^3=a^3-d^3+bc(a-d)=(a-d)(a^2+ad+d^2+bc),$$

így pedig a $P=a^2+ad+d^2+bc$ tényező (1) mindhárom tagjában szerepel, szorzattá alakíthatunk: ha $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\alpha$, akkor

$$(2)\qquad P\cdot\big[c\alpha^2-(a-d)\alpha-b\big]=0.$$

Ellenőrizhető, hogy ha $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)$ kiszámolásakor egyik nevező sem nulla, akkor (2)-ből a lépések megfordításával megkapható az $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\alpha$ feltétel. Vegyük észre, hogy a (2)-beli szorzat első tényezője, P, nem függ α értékétől. Ha tehát ez a tényező nulla – ami kizárólag az f függvényen múlik –, akkor $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\alpha$ minden olyan α számra teljesül, amelyre $f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)$ értelmes. A feladat második feltétele szerint viszont $f\big(f\big(f(2)\big)\big)=3$, az első tényező így most nem nulla, (2)-ben tehát a második tényezőnek kell nullának lennie, ha $\alpha=1$:

$$c-(a-d)-b=0,$$

azaz $a+b=c+d$. Innen viszont $f(1)=\dfrac{a+b}{c+d}=1$ következik, és ezt akartuk bizonyítani. (Ismét meg kell jegyeznünk, hogy a feladat szerint $f(1)$ értelmes, tehát oszthatunk $(c+d)$-vel.)

() *Több dolgozat alapján.*

Megjegyzések. 1.) A feladat második feltétele csak annyiban lényeges, hogy

$$f\big(f\big(f(\alpha)\big)\big)=\alpha$$

nem azonosság. Az $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$ függvényre például $f\big(f\big(f(x)\big)\big)=x$ a teljes értelmezési tartományon, de $f(1)=2$. Ebben az esetben az első tényező,

$$P=a^2+ad+d^2+bc=1^2-1\cdot2+2^2-3\cdot1=0.$$

Általában is így készíthetők olyan elsőfokú törtfüggvények, amelyeket háromszor iterálva az identitást kapjuk.

2.) A megoldásból kiderül, hogy az α szám pontosan akkor fixpontja az $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ elsőfokú törtfüggvénynek, ha α gyöke a $cx^2-(a-d)x-b$ polinomnak. Ez lehet elsőfokú, ha $c=0$, ilyenkor az $f(x)$ – legfeljebb – elsőfokú polinom. A feladat úgy is megoldható, hogy annak számolunk utána, hogyan alakul ez az egyenlet $f\big(f(x)\big)$, illetve $f\big(f\big(f(x)\big)\big)$ esetén. A megoldáshoz hasonló számolással adódik, hogy az $f\big(f(x)\big)$ függvény fixpontjait kiszámoló egyenlet $(a+d)\big[cx^2-(a-d)x-b\big]=0$, az $f(x)$-re vonatkozó megfelelő egyenlet $(a+d)$-szerese – és így $a+d=0$ annak a feltétele, hogy $f\big(f(x)\big)$ az identikus leképezés legyen –, az $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ függvény fixpontjait pedig éppen a $P[cx^2-(a-d)x-b]=0$ egyenlet számolja ki.

3.) A megoldás során lényegében azt igazoltuk, hogy ha az $f\Big(f\big(f(\alpha)\big)\Big)=\alpha$ egy adott értékre nem triviális módon – azaz anélkül, hogy a közbülső $f(\alpha)$, $f\big(f(\alpha)\big)$ értékek egyenlők volnának α-val – teljesül, akkor fennáll az értelmezési tartomány minden elemére. Másképpen fogalmazva: ha a $g(x)=f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ függvénynek van fixpontja, azaz olyan α szám, amelyre $g(\alpha)=\alpha$, akkor az vagy az f függvénynek is fixpontja, vagy pedig a $g(x)$ függvénynek minden szám fixpontja, $g(x)=x$ a g értelmezési tartományán. A megoldás kétségkívül szerencsésen alakult, a hosszadalmas számolás után a (2) szorzatba mintegy belebotolva találtunk rá a feladat jelentésére, és így magára az állításra is. Az alábbi megközelítés csak a lényeges dolgokat veszi figyelembe.

II. megoldás. Legyen továbbra is $g(x)=f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$, és tekintsük a $p=f(1)$ és a $q=f(p)=f\big(f(1)\big)$ értékeket. A feltétel szerint ekkor $f(q)=1$. Azonnal adódik, hogy $g(p)=p$ és $g(q)=q$, a $g(x)$ függvénynek az 1 mellett a p és a q is fixpontja. Ha e három érték között vannak egyenlők, akkor az $1\xrightarrow{f}p\xrightarrow{f}q\xrightarrow{f}1$ láncban van két szomszédos egyenlő tag, ahonnan, mivel f kölcsönösen egyértelmű, $1=p=q$, azaz a bizonyítandó állítás, $f(1)=1$ következik.

Ha az 1, p, q számok között nincsenek egyenlők, akkor az elsőfokú törtfüggvények kompozíciójaként adódó $g(x)$ függvénynek, amely így maga is elsőfokú törtfüggvény, három különböző fixpontja van. Ismeretes, hogy egy elsőfokú törtfüggvényt három értéke egyértelműen meghatároz. Ha tehát $f(1)\neq 1$, akkor $g(x)=x$ teljesül az x három különböző értékére, 1-re, p-re és q-ra. Ez pedig azt jelenti, hogy a $g(x)$ értelmezési tartományának minden elemére $g(x)=x$. A feltétel szerint viszont $g(2)=3$, így az 1, p, q számok nem lehetnek valamennyien különbözők. Ezzel a megoldást befejeztük.

() *Gyarmati Ákos* (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn., 9. évf.)