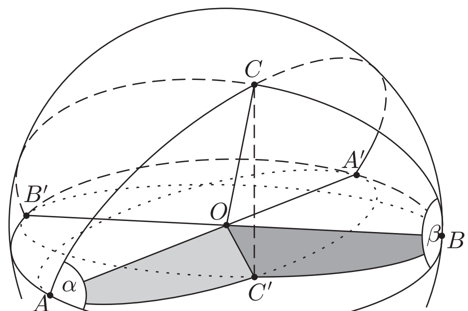
I. megoldás. Legyen O a gömb középpontja, amelyen a háromszög elhelyezkedik; a csúcsokat a szokásos módon jelöljük A, B, C-vel. Ha a gömböt és a gömbháromszöget egységnyi sugarúra kicsinyítjük, (1) mindkét oldala a hasonlóság arányának megfelelően változik; ezért az állítást elég egységnyi sugarú gömbre igazolni. Továbbá, ha α és β egyike sem hegyesszög, az állítás triviális, mert $\cos\alpha$ és $\cos\beta$ nempozitív. Ezért, figyelembe véve, hogy az állítás az α és β felcserélésére szimmetrikus, azt is feltételezhetjük, hogy α hegyesszög.

Tekintsük az OAB, OBC és OAC körcikkeket; ezek területe $\frac{c}{2}$, $\frac{a}{2}$, illetve $\frac{b}{2}$. Vetítsük az OBC és OAC körcikkeket az OAB síkra. Egy síkbeli alakzat merőleges vetítésekor a vetület és az eredeti alakzat területének aránya a két sík bezárt szögének koszinusza, tehát a körcikkek vetületének területe $\frac{a}{2}|\cos\beta|$, illetve $\frac{b}{2}\cos\alpha$.

A továbbiakban három esetet fogunk megkülönböztetni attól függően, hogy β hegyes-, tompa- vagy derékszög.

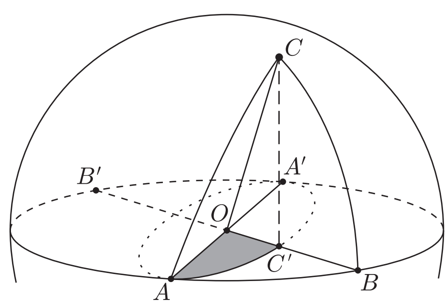
1. eset: β hegyesszög. Ebben az esetben a C' pont az OAB körcikk belsejébe esik (*1. ábra*). Az AC és BC körívek vetületei egy AA', illetve BB' nagytengelyű ellipszis megfelelő ívei. A két ellipszis az OAB, OBA', $OA'B'$ és $OB'A$ körcikkek mindegyikében metszi egymást. Mindegyik tartományban csak egy-egy metszéspontjuk van, mert két kúpszeletnek legfeljebb négy közös pontja lehet.



1. ábra

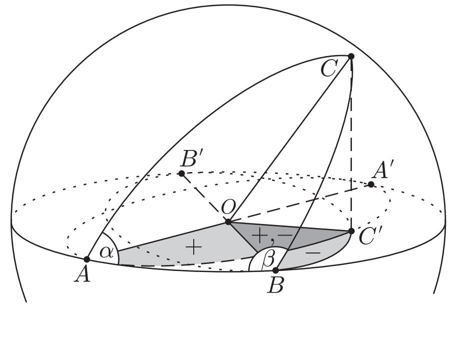
Az OBC és OAC körcikkek vetületei részei az OAB körcikknek, azt nem fedik le teljesen és nem nyúlnak egymásba. Ezért területük összege kisebb, mint az OAB körcikk területe: $\frac{a}{2}\cos\beta + \frac{b}{2}\cos\alpha < \frac{c}{2}$. Ez éppen a bizonyítandó állítás.

2. eset: β derékszög. Ekkor a C' pont az OB szakasz belsejébe esik (*2. ábra*). Az OAC körcikk vetülete valódi része az OAB körcikknek, a területe tehát kisebb: $\frac{b}{2}\cos\alpha < \frac{c}{2}$. Mivel $\cos\beta = 0$, ez éppen az állítás.



2. ábra

3. eset: β tompaszög. Ekkor a C' pont az OBA' körcikk belsejébe esik (*3. ábra*). Mivel $\cos\beta$ negatív, (1) baloldalán az OAC és OBC körcikkek vetületeinek, azaz az OAC' és OBC' ellipszisdarabok területének különbsége áll. Az OAC' ellipszisdarab kilóg az OAB körcikkből, de a kilógó részt az OBC' ellipszisdarab teljesen lefedi. Ezért a két ellipszisdarab területének különbsége kisebb, mint az OAB körcikk területe: $\frac{b}{2}\cos\alpha - \frac{a}{2}|\cos\beta| < \frac{c}{2}$, azaz $b\cos\alpha + a\cos\beta < c$.



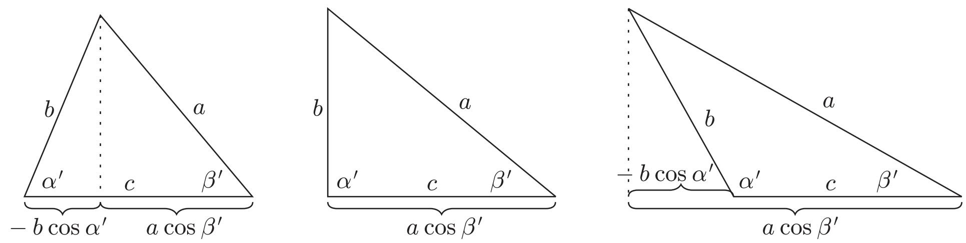
3. ábra

() *Bóka Gergely, Csóka Endre* és *Paulin Roland* dolgozata alapján

Megjegyzés. A megoldásból jól látható, hogy a gömbháromszög vetületének területe az OAB síkon minden esetben $\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\cos\beta - \frac{b}{2}\cos\alpha$.

II. megoldás. Ismét feltételezzük, hogy a gömb sugara egységnyi. Az a, b és c ívhosszakra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ezért ilyen hosszúságú szakaszokból a síkban is háromszög szerkeszthető. Legyenek a síkbeli a, b, c oldalú háromszög megfelelő szögei rendre α', β' és γ'.

A síkban $a\cdot\cos\beta' + b\cdot\cos\alpha' = c$, mert $a\cdot\cos\beta'$ és $b\cdot\cos\alpha'$ nem más, mint az a és b oldalak vetületének előjeles hossza a c oldalon. Az összefüggés hegyes-, derék- és tompaszögű háromszögekben egyaránt érvényes (*4. ábra*). Ezért elég azt igazolnunk, hogy



4. ábra

$\cos\alpha < \cos\alpha'$ és $\cos\beta < \cos\beta'$, azaz $\alpha > \alpha'$ és $\beta > \beta'$. A két egyenlőtlenség csupán az a és b oldalak szerepének felcserélésében különbözik, ezért elég az előbbit bizonyítani.

A bizonyításhoz felhasználjuk a gömbi koszinusztételt, valamint azt az ismert tényt, hogy a gömbháromszög kerülete kisebb, mint 2π. (Ezeket a kedves Olvasó megtalálhatja például Reiman István *A geometria és határterületei* c. könyvében.)

A koszinusztételből $1 + \cos\alpha' = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} = \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$. A szögekre vonatkozó gömbi koszinusztétel szerint

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha,$$

amiből

$$\begin{aligned} 1 + \cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b\cos c + \sin b\sin c}{\sin b\sin c} = \\ &= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b\sin c} = \frac{2\sin\frac{b+c+a}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c}. \end{aligned}$$

A bizonyítandó állítás tehát:

$$\frac{2\sin\frac{b+c+a}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c} < \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\frac{\sin\frac{b+c+a}{2}}{\frac{b+c+a}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}}{\frac{b+c-a}{2}} < \frac{\sin b}{b}\cdot\frac{\sin c}{c}.$$

Legyen $p = \dfrac{b+c-a}{2}$ és $q = \dfrac{b+c+a}{2}$. A háromszög-egyenlőtlenségből, valamint az $a+b+c < 2\pi$ egyenlőtlenségből következik, hogy $0 < p < b, c < q < \pi$, továbbá a definícióból $p + q = b + c$.

Legyen $f(t) = \ln\dfrac{\sin t}{t}$; azt kell igazolnunk, hogy $f(p) + f(q) < f(b) + f(c)$.

Vizsgáljuk meg az f függvényt a $(0,\pi)$ intervallumban. A függvény második deriváltja negatív:

$$f''(t) = \left(\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t}\right)' = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t} < 0,$$

tehát a függvény szigorúan konkáv. Ebből következik, hogy

$$f(b) + f(c) > \left(\frac{q-b}{q-p}f(p) + \frac{b-p}{q-p}f(q)\right) + \left(\frac{q-c}{q-p}f(p) + \frac{c-p}{q-p}f(q)\right) = f(p) + f(q).$$

() *Rácz Béla András* dolgozata alapján