Megoldás. A csupa 1-esből álló számok közül a 111111 a legkisebb 7-tel osztható, és ez osztható 37-tel is. Legyen K az n darab 1-esből álló szám, és osszuk el n-et maradékosan 6-tal: $n=6k+x$, ahol $0<x\le 6$. Ekkor

$$\begin{aligned}K=\underbrace{11\ldots1}_{x}\underbrace{11\ldots11}_{6k}=\underbrace{11\ldots1}_{x}\cdot 10^{6k}+111111\cdot 10^{6k-6}+111111\cdot 10^{6k-12}+\\+\cdots+111111\cdot 10^{6}+111111=\\=\underbrace{11\ldots1}_{x}\cdot 10^{6k}+111111\cdot\left(10^{6k-6}+10^{6k-12}+\cdots+10^{6}+1\right).\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy itt az összeg második tagja 7-tel is és 37-tel is osztható; így K pontosan akkor osztható 7-tel, ha az első tag, $\underbrace{11\ldots1}_{x}\cdot 10^{6k}$ osztható 7-tel. Ez csak úgy lehet, ha $7\mid\underbrace{11\ldots1}_{x}$, ami a $0<x\le 6$ tartományon belül csak $x=6$-ra áll fenn. Ebben az esetben viszont $37\mid\underbrace{11\ldots1}_{x}$ is teljesül. Ezzel az állítást beláttuk.

() *Kajtár Máté* (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 10. évf.)