Megoldás. A színezés szabályaiból következik, hogy csak pozitív racionális számok lehetnek pirosak. Ha ugyanis $x=\dfrac{p}{q}$ pozitív racionális szám, ahol p és q pozitív egészek, akkor $x+1=\dfrac{p+q}{q}$ és $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{p}{p+q}$ is pozitív racionális számok. Mivel kezdetben csak az 1 piros, azért a többi piros szám is pozitív lesz és racionális.

Megmutatjuk, hogy az összes pozitív racionális szám piros lesz, vagyis megkapható az 1-ből kiindulva, az $x\mapsto x+1$ és az $x\mapsto \dfrac{x}{x+1}$ függvények segítségével. Ezt úgy igazoljuk, hogy egy tetszőleges pozitív racionális számból előállítjuk az 1-et a fenti függvények inverzeinek a segítségével.

Az $x\mapsto x+1$ függvény inverze az $x\mapsto x-1$ függvény. Ha $x=\dfrac{p}{q}$, akkor

$$x=\frac{p}{q}\mapsto\frac{p-q}{q},$$

tehát a számlálóból kivonjuk a nevezőt. Természetesen ezt a hozzárendelést csak akkor alkalmazhatjuk, ha $\dfrac{p}{q}>1$.

Az $x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$ függvény inverze az $x\mapsto\dfrac{x}{1-x}$; így

$$x=\frac{p}{q}\mapsto\frac{p}{q-p},$$

tehát a nevezőből kivonjuk a számlálót – természetesen ezt a hozzárendelést csak akkor alkalmazhatjuk, ha $\dfrac{p}{q}<1$.

A fenti két függvény segítségével bármely 1-től különböző, pozitív racionális számtól eljuthatunk az 1-hez. Ha ugyanis a racionális szám nagyobb 1-nél, akkor a számlálójából kivonjuk a nevezőt, ha pedig a szám kisebb 1-nél, akkor a nevezőből vonjuk ki a számlálót. Mindkét művelet során a számláló vagy nevező közül az egyik változatlan marad, a másik pedig csökken (miközben továbbra is pozitív marad), tehát véges sok lépés után egyenlők lesznek.

() *Nagy Ákos* (Budapest, Szent István Gimn., 9. évf.)