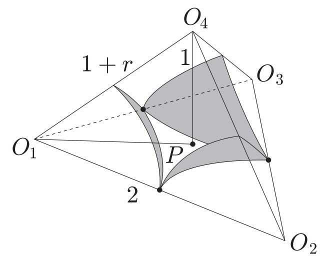
Megoldás. A három adott egységsugarú gömb O_1, O_2, O_3 középpontja egy 2 egység oldalú szabályos háromszög három csúcsa. A háromszög S_1 síkja párhuzamos az S síkkal, és attól 1 egység távolságra van. Jelöljük a gömböket kívülről érintő gömb sugarát r-rel ($r < 1$), középpontját O_4-gyel. Mivel O_4 az S síkban van, S_1-től való távolsága 1 egység. A négy középpont egy háromszög alapú szabályos gúlát határoz meg. Az O_4 vetületét az S_1 síkon jelölje P. Mivel az $O_1O_2O_3$ háromszög szabályos, P a háromszög középpontja és egyben súlypontja is.



Az O_1PO_4 derékszögű háromszögben $O_4P = 1$, $O_1O_4 = 1 + r$ és $O_1P = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Írjuk fel a háromszögre Pitagorasz tételét:

$$(1 + r)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1,$$

innen $r = \sqrt{\frac{7}{3}} - 1 \approx 0{,}5275$ egység a kívülről érintő gömb sugara.

Van azonban egy másik lehetőség is, amikor a keresett gömböt belülről érintik az adott gömbök, ennek sugara legyen R – ekkor az előbbi esethez hasonlóan:

$$R - 1 = \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad \text{azaz} \quad R = \sqrt{\frac{7}{3}} + 1 \approx 2{,}5275 \text{ egység.}$$

() *Nagy Judit* (Szombathely, Keresk. és Vendéglátói Szakképző Isk., 12. évf.)

Megjegyzés. A megoldásban „szemléletből” elfogadtuk, hogy a keresett gömb vagy mindhárom adott egységgömböt kívülről, vagy mindegyiket belülről érinti. Ha viszont nem bízzuk magunkat teljesen a szemléletünkre (térgeometriai feladatnál ez különösen indokolt!), akkor ezt nagyon egyszerűen be is láthatjuk. Tegyük fel, hogy a keresett gömb pl. az O_1 középpontú gömböt kívülről, az O_2 középpontút pedig belülről érinti. Ekkor (a keresett sugarat r'-vel jelölve) $O_4O_1 = r' + 1$, $O_4O_2 = r' - 1$, így

$$O_1O_2 = 2 = (r' + 1) - (r' - 1) = O_4O_1 - O_4O_2,$$

tehát az $O_1O_2O_4$ háromszög elfajuló, azaz O_4 az O_1O_2 egyenesen van. Ez az egyenes azonban – az S-sel párhuzamos síkban lévén – nem metszi S-t, aminek O_4 egy pontja; ez ellentmondás.