

Jelöljük r_0 -al az üreg sugarát, középpontjának a gömb középpontjától mért távolságát d -vel, a gömb anyagának sűrűségét ρ -val. A test tömege a térfogatából és a sűrűségéből határozható meg:

$$(1) \quad m = 4\pi(r^3 - r_0^3)\rho/3.$$

A gömb középpontján áthaladó tengelyek közül arra nézve lesz a tehetetlenségi nyomaték minimális, amely merőleges a gömb és az üreg középpontjait összekötő egyenesre. Értékét a Steiner-tétel alapján számíthatjuk ki:

$$(2) \quad \Theta = \frac{8\pi}{15}(r^5 - r_0^5)\rho - \frac{4\pi}{3}r_0^3\rho d^2.$$

A fenti két egyenletből nem lehet egyértelműen meghatározni az ismeretlen mennyiségeket (r_0 , d és ρ), de lehetséges értékeiket határok közé szoríthatjuk.

Fejezzük ki az (1) egyenletből a ρ sűrűséget, és helyettesítsük be (2)-be. Átrendezés után:

$$(3) \quad d^2 = -\frac{2}{5}r_0^2 + \frac{\Theta}{m} + \left(\frac{2}{5}r^2 - \frac{\Theta}{m}\right)r^3\frac{1}{r_0^3}$$

adódik. A numerikus adatokkal:

$$d^2 = -0,4r_0^2 + 13,44 \text{ cm}^2 - \frac{430 \text{ cm}^5}{r_0^3}$$

d^2 -re a $0 \leq d^2 \leq (r - r_0)^2$ triviális kikötés tehető. Ezt a feltételt a (4) egyenlet jobb oldala csak $3,86 \text{ cm} \leq r_0 \leq 4,22 \text{ cm}$ teljesülése esetén tudja kielégíteni. Erről legegyszerűbben táblázat készítésével győződhetünk meg. r_0 imént kapott értékeiből (1) alapján határozhatjuk meg a sűrűség lehetséges értékeit:

$$(5) \quad 3,53 \text{ g/cm}^3 \leq \rho \leq 4,79 \text{ g/cm}^3.$$

Vankó Péter (Bp., Móricz Zs. Gimn. IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Az adatok hiányossága miatt nem volt szükség a tehetetlenségi nyomaték minimumának igen pontos (kb. 0,03%) mérésére.

2. A feladat egy szó elírása miatt az eredetileg elképzelthez képest más értelemmel jelent meg. A feladatot ezért 1410-es számmal ismét kitűzzük.