A kiindulási állapotban a buborékokban levő levegő nyomása egyensúlyt tart a külső légnyomással és a felületi feszültségből származó görbületi nyomással:

$$p_R = p_0 + \frac{4\alpha}{R}, \qquad \text{illetve} \qquad p_r = p_0 + \frac{4\alpha}{r}, \tag{1}$$

ahol p_R és p_r az R és r sugarú buborékokban levő levegő nyomása, α pedig a szappanhártya felületi feszültsége. Ha kinyitnánk a csapot, akkor a kisebb buborék teljesen leeresztene, a nagyobb pedig megnőne, mivel $r < R$ esetén $p_r > p_R$. Emiatt a *kisebb* buborékot kell elektromosan feltöltenünk, ha azt akarjuk, hogy a benne levő gáznyomás a másik buborékéval megegyező legyen.

Számítsuk ki először azt, hogy mekkorára kell növelnünk a kis buborék sugarát ahhoz, hogy a belsejében p_R nyomás legyen! A Boyle–Mariotte-törvény alapján

$$p_r \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = p_R \cdot \frac{4}{3} x^3 \pi,$$

ahonnan a kérdéses sugár

$$x = \sqrt[3]{\frac{p_r}{p_R}} \cdot r = \sqrt[3]{\frac{p_0 + \frac{4\alpha}{r}}{p_0 + \frac{4\alpha}{R}}} \cdot r. \tag{2}$$

Ezután meghatározzuk, hogy mekkora Q töltés hatására lesz a r sugarú buborék megváltozott sugara x. Az egynemű elektromos töltések taszítják egymást, mintegy fel akarják fújni a buborékot. Ezt a hatást úgy írhatjuk le, hogy kiszámítjuk a buborék falának egységnyi felületére ható elektromos erőt, a p_Q-val jelölt „elektromos nyomást”, majd felírjuk a nyomások egyensúlyát kifejező

$$p_R - p_0 = \frac{4\alpha}{R} - p_Q \tag{3}$$

egyenletet.

Tekintsük az x sugarú, Q töltésű gömböt, amelynek – mint gömbkondenzátornak – a kapacitása

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot x = \frac{x}{k},$$

elektrosztatikus energiája pedig

$$W(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{k}{2}\frac{Q^2}{x}.$$

Nyomjuk össze gondolatban a töltéseket egy kicsiny Δx távolsággal, vagyis alakítsunk ki egy $x - \Delta x$ sugarú, de ugyancsak Q össztöltésű gömbkondenzátort! Az összenyomás során

$$\Delta W = p_Q \cdot 4\pi x^2 \cdot \Delta x$$

munkát kell végeznünk, és ez a munka teljes egészében a töltések potenciális energiáját (az elektrosztatikus energiát) növeli. Ez utóbbi a gömbkondenzátor energiaváltozásából számítható:

$$\Delta W = W(x - \Delta x) - W(x) = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{x - \Delta x} - \frac{1}{x}\right) \approx \frac{kQ^2}{2x^2}\,\Delta x.$$

ΔW kétféle kifejezésének összevetéséből

$$p_Q = \frac{kQ^2}{8\pi x^4},$$

a (3) egyensúlyi feltételre pedig

$$p_R - p_0 = \frac{4\alpha}{R} - \frac{kQ^2}{8\pi x^4}$$

adódik. Innen (1) felhasználásával

$$Q^2 = \frac{32\pi\alpha}{k\left(x^3 - \frac{x^4}{R}\right)},$$

majd (2) behelyettesítésével

$$Q = \pm\sqrt{\frac{32\pi\alpha}{k} \cdot r^3 \cdot \frac{p_0 + \frac{4\alpha}{r}}{p_0 + \frac{4\alpha}{R}} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\sqrt[3]{\frac{p_0 + \frac{4\alpha}{r}}{p_0 + \frac{4\alpha}{R}}}\right)}$$

adódik. (A töltés előjele akár pozitív, akár negatív lehet, mindkét esetben az elektromos tér növelni igyekszik a buborék méretét.)

Szilágyi Péter (Debreceni Egyetem Kossuth L. Gyak. Gimn. 10. o.t.)

Megjegyzések: 1. Mivel reális méretű buborékoknál $p_0 \gg \dfrac{4\alpha}{r}$, jó közelítéssel fennáll

$$Q \approx \sqrt{\frac{32\pi\alpha}{k} \cdot r^3 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)}.$$

2. Sokan úgy számoltak, mintha az elektromosan töltött gömb kicsiny felületdarabkáira ható erő az ottani töltés és a térerősség szorzata lenne, – holott az erő ténylegesen ennek csak a fele.