Ismeretes, hogy ω körfrekvenciájú váltóáram esetén egy C kapacitású kondenzátoron eső feszültség nagysága és a rajta átfolyó áram nagysága között

$$\frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C}$$

a kapcsolat (azaz a kondenzátor váltóáramú ellenállása $1/(\omega C)$, továbbá a szinuszosan váltakozó áram fázisa a feszültséghez képest $90°$-ot *siet.* Ugyanezek az arányok tekercsnél

$$\frac{U_L}{I_L} = L\omega$$

(vagyis egy L öninduktivitású tekercs váltóáramú ellenállása $L\omega$), viszont a rajta átfolyó áram a feszültséghez képest $90°$-ot ***késik,*** tehát éppen ellenkező előjelű, mint amilyen egy kondenzátornál lenne. Emiatt egy tekercs (adott frekvenciájú váltóáramú körben) úgy tekinthető, mintha negatív (bizonyos $C_L < 0$) kapacitású kondenzátor lenne:

$$L\omega = -\frac{1}{\omega C_L}, \quad \text{azaz} \quad C_L = -\frac{1}{\omega^2 L}.$$

Célszerű bevezetni a

$$k^2 = \frac{1}{\omega^2 LC} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

jelölést. A dimenziótlan k szám azt mutatja meg, hogy egy-egy L és C elemből álló egyszerű rezgőkör ω_0 körfrekvenciája hányszorosa lenne a feladatban szereplő (a lánc paramétereitől független, kívülről megszabott) ω körfrekcenciának.break Ezzel a jelöléssel a láncban szereplő tekercsek mindegyikének „effektív kapacitása” $C_L = -k^2C$.

Egy fizika feladatban a „végtelen lánc” kifejezés értelemszerűen azt jelenti, hogy a lánc „nagyon hosszú”, elemeinek száma nagyon nagy. Tekintsük először egy véges, n hosszúságú (n tekercset tartalmazó) láncot! Mivel a lánc nem tartalmaz ohmos ellenállást, a rajta átfolyó áram és a rá eső feszültség közötti fáziseltolódás vagy $+90°$, vagy $-90°$. Az egyik esetben a lánc helyettesíthető egy bizonyos C_n kapacitású kondenzátorral, a másik esetben pedig egy alkalmasan választott induktivitású tekerccsel. Tételezzük fel, hogy az előbbi eset áll elő, és határozzuk meg C_n értékét! (Ha C_n-re negatív szám adódna, az annyit jelent, hogy a lánc tekercsként viselkedik.)

$n = 1$ esetben egy C kapacitású kondenzátor és egy L induktivitású tekercs (vagyis egy másik, C_L kapacitású kondenzátor) soros eredőjét kell meghatároznunk:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_L}, \quad \text{ahonnan} \quad C_1 = \frac{CC_L}{C + C_L} = \frac{C(-k^2C)}{C + (-k^2C)} = \frac{k^2}{k^2-1}C.$$

$n = 2$ esetben egy C kapacitású kondenzátor sorosan kapcsolódik egy tekercs és C_1 párhuzamos eredőjéhez:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1 + (-k^2C)}, \quad \text{általában pedig} \quad \frac{1}{C_{n+1}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_n - k^2C},$$

ahonnan

$$C_{n+1} = \frac{C(C_n - k^2C)}{C_n + (1-k^2)C}. \tag{1}$$

Célszerű valamennyi kapacitást $C_n = x_n \cdot C$ módon C egységekben kifejezni, mert akkor a fenti rekurziós formula a viszonylag egyszerű

$$x_{n+1} = \frac{x_n - k^2}{x_n + 1 - k^2} \tag{2}$$

alakot ölti.

Kérdés: van-e az x_n számsorozatnak (vagyis a C_n kapacitásértékeknek) határértéke, ha $n \to \infty$? Mondhatjuk azt, hogy ha $n \gg 1$, akkor $x_n \approx x_{n+1}$, és a (2) rekurziós összefüggés (a közelítőleg egyenlő x_n számértékeket x-szel jelölve) egy másodfokú egyenletre vezet:

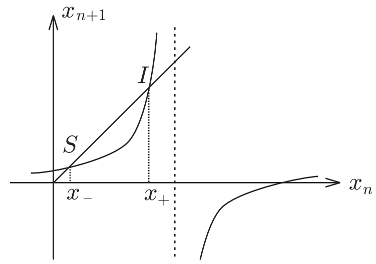
$$x = \frac{x - k^2}{x + 1 - k^2}, \quad \text{vagyis} \quad x^2 - k^2x + k^2 = 0. \tag{3}$$

Ennek az egyenletnek $k > 2$ esetben két valós gyöke van:

$$x_\pm = \frac{k^2}{2} \pm \frac{k}{2}\sqrt{k^2-4}. \tag{4}$$

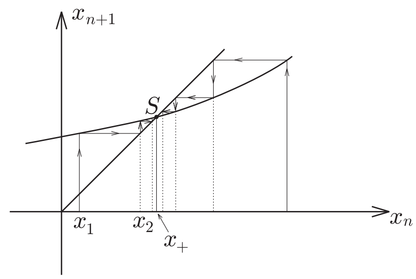
Vajon melyik gyök az „igazi”, vagy esetleg mindkettőnek lehet fizikai jelentése? (Erre utal a feladat szövegének második kérdése.) És mi a helyzet akkor, amikor $\omega > \dfrac{1}{2\sqrt{LC}} = \dfrac{\omega_0}{2}$, vagyis $k < 2$, tehát (3)-nak egyetlen (valós) gyöke sincs?

Gyanítható, hogy (4)-ben szereplő gyökök közül a kisebb x_- a „helyes". Ha ugyanis olyan tekercset választunk, amelyre L nagyon kicsi (vagyis $\omega_0 \gg \omega$), akkor a tekercsek rövidzárként viselkednek, az A és B pontok közötti eredő váltóáramú ellenállás tehát egyetlen C kapacitású kondenzátoréval egyezik meg. Valóban, $k \gg 1$ esetben $x_- \approx 1$, tehát az A és B pontok közötti eredő váltóáramú ellenállás $\dfrac{1}{\omega C}$, viszont $x_+ \approx k^2 \gg 1$ nem felel meg fenti várakozásnak.



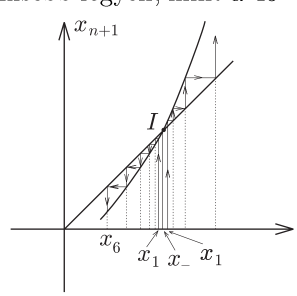
1. ábra

Vizsgáljuk meg a kérdést más oldalról is! Térjünk vissza a (2) rekurziós összefüggéshez! Ábrázoljuk az $x_{n+1} = f(x_n)$ függvényt egy derékszögű koordináta-rendszerben, és rajzoljuk be ugyanebbe az $x_{n+1} = x_n$ egyenes képét is! Ha $k > 2$, a rekuzciós összefüggésnek megfelelő görbének (hiperbola) és a 45°-os egyenesnek két közös pontja van (*1. ábra*), a korábban kiszámított x_--nak megfelelő S, valamint az x_+-nak megfelelő I.



2. ábra

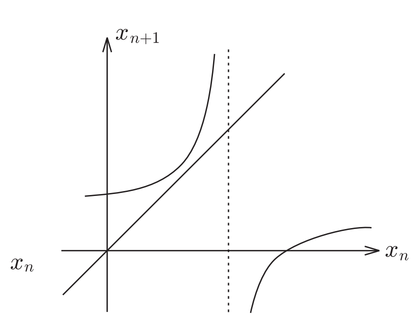
Induljunk ki x_1 ismert értékéből (vagy bármilyen más módon választott x_1 számból), majd a hiperbola és az egyenes segítségével grafikusan határozzuk meg az x_2, x_3, x_4 stb. pontokat (*2. ábra*). Látható, hogy ezek igen gyorsan befutnak az S pontnak (az ún. *stabil fixpontnak*) megfelelő x_--ba. Ha a kezdeti x_1 értéket x_- közelébe (attól tetszés szerintien kicsi, de véges távolságra) választjuk, az iteráció eredményeképpen adódó pontok gyors ütemben eltávolodnak x_--tól; az iteráció I fixpontja tehát *instabil* (*3. ábra*). A fixpontok stabilitásának az a feltétele, hogy az iterációs függvény meredekségének abszolút értéke a fixpontban kisebb legyen, mint a 45°-os egyenesé; ez S-re teljesül, I-re viszont nem.



3. ábra

Mindez azt mutatja, hogy a $\omega < 1/\left(2\sqrt{LC}\right)$ körfrekvencián „végtelen lánc" eredő váltóáramú ellenállása – a távoli végének lezárásától, tehát x_1 számértékétől függetlenül – csak egy jól meghatározott érték lehet:

$$Z_{\text{lánc}} = \frac{1}{\omega x_- C} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\omega^2 LC}}{2\omega C}.$$



4. ábra

Mi a helyzet

$$\omega > \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{2}$$

esetben? Ilyenkor a (2) iterációnak *nincs fixpontja* (vagyis a hiperbolának és a 45°-os egyenesnek nincs közös pontja) (*4. ábra*). Ebben az esetben a x_n számsorozatnak nincs határértéke, tehát a hosszú (de nem végtelen hosszú!) lánc váltóáramú ellenállása attól függ, hogy ténylegesen milyen hosszú is a „nagyon hosszú”.

A feladat jól tárgyalható a komplex impedanciák segítségével is. Ezekkel felírva a (2)-nek megfelelő rekurziós összefüggést, majd keresve ennek fixpontját azt kapjuk, hogy a végtelen lánc eredő impedanciája $\omega > \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ esetben ohmos részt is tartalmaz. Ez azért meglepő, mert akármilyen hosszú, de véges sok (ideális) tekercsből és kondenzátorból álló láncnak csak meddő ellenállása van (impedanciája tisztán kapacitív, vagy tisztán induktív). Érdekes, hogy a lánc impedanciája $\omega > \omega_0/2$ esetben ω-tól független mennyiség, nevezetesen $Z = \sqrt{L/C}$. (Ezt a mennyiséget a lánc „hullámellenállásának” nevezik.)

A végtelen lánc ohmos ellenállásának megjelenése a lánc mentén jobbra, illetve balra terjedő hullámokkal áll kapcsolatban, ezek diszkussziója azonban hosszabb elemzést igényelne.

Béky Bence (Főv. Fazekas M. Gyak. Gimn. 12. o.t.),
Hettinger Tamás (Budapest, Eötvös J. Gimn. 11. o.t.),
Pápai Tivadar (Barcs, Dráva Völgye Középisk. 12. o.t.),
Tábor Áron (Főv. Fazekas M. Gyak. Gimn. 11. o.t.) és
Tóth Sándor (Csongrád, Batsányi J. Gimn. 11. o.t.)
dolgozatának felhasználásával