A SOHO a Nap és a Föld között helyezkedik el, a Nap körül kering a Földdel egyező szögsebességgel. A centripetális erő a Nap és a Föld által kifejtett gravitációs erő eredője (a többi égitest hatásától eltekintünk). A mozgásegyenlet:

$$m(R-r)\omega^2 = f\frac{mM_\mathrm{N}}{(R-r)^2} - f\frac{mM_\mathrm{F}}{r^2}, \tag{1}$$

ahol R a Nap-Föld távolság, r a SOHO Földtől mért távolsága. Felírhatjuk még a Föld mozgásegyenletét:

$$M_\mathrm{F} R\omega^2 = f\frac{M_\mathrm{N} M_\mathrm{F}}{R^2}. \tag{2}$$

A fenti két egyenlet hányadosa

$$\frac{(R-r)}{R} = \frac{R^2}{(R-r)^2} - \frac{R^2}{r^2}\,\frac{M_F}{M_N},$$

ami az $x = r/R$ és $\mu = M_F/M_N$ jelölésekkel

$$x^2 - (1-x)^2\mu = (1-x)^3 x^2. \tag{3}$$

Ez az x-ben ötödfokú egyenlet, amely (μ konkrét számértékét behelyettesítve) számítógéppel, vagy grafikusan közelítőleg megoldható. A $0 < x < 1$ tartományban egyetlen megoldás van:

$$x \approx 0{,}01, \quad \text{azaz} \quad r \approx 1{,}5\cdot 10^6~\text{km}.$$

Úgy is eljárhatunk, hogy a (3) egyenletet algebrai átalakításokkal

$$\mu = 3x^3\left[1 + \frac{3x - 2x^2}{3(1-x)^2}\right] \tag{4}$$

alakra hozzuk, majd kihasználjuk, hogy a Föld tömege sokkal kisebb, mint a Nap tömege, nevezetesen

$$\mu = 3{,}01\cdot 10^{-6} \ll 1.$$

Emiatt x is 1-nél sokkal kisebb szám kell legyen, tehát a szögletes zárójelben levő tört kifejezés az 1 mellett jó közelítéssel elhanyagolható. Ekkor viszont az egyenlet

$$\mu \approx 3x^3,$$

ahonnan

$$x \approx \sqrt[3]{\mu/3}, \quad \text{azaz} \quad r \approx R\sqrt[3]{M_F/3M_N} = 1{,}5\cdot 10^6~\text{km}.$$

A SOHO ugyan a Nap és a Föld között helyezkedik el, létezik azonban a Nap-Föld egyenesen még 2 pont, ami megfelelő lenne. Az egyik ilyen pont a Földnek a Nappal ellentétes oldalán van, a Földtől $r \approx 1{,}5\cdot 10^6$ km távolságban, a másik pedig a Napnak a Földdel ellentétes oldalán a Naptól kb. R, vagyis a Földtől $r \approx 2R$ távolságra. Ez a két pont a napkitöréseket észlelő műholdak szempontjából nyilván érdektelen.

Szekeres Balázs (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A mozgásegyenlet megoldása során lehet kevésbé jó közelítést is végezni. Az (1) egyenlet

$$mr\omega^2 = f\frac{mM_\mathrm{F}}{r^2} + f\frac{mM_\mathrm{N}}{R^2} - f\frac{mM_\mathrm{N}}{(R-r)^2} \tag{5}$$

alakra is hozható. A jobb oldal második és harmadik tagja $r \ll R$ esetén egymástól nem sokban különbözik, ezért arra gondolhatnánk, hogy egymást majdnem kiejtik. Ha elhagyjuk ezt a két tagot, akkor lényegében azt a gondolatmenetet követjük, hogy a SOHO tulajdonképpen a Föld körül kering ω szögsebességgel, és a Nap hatása a műholdra elhanyagolható. A várt 1%-os hiba helyett azonban mintegy 40%-os hibával kapjuk csak meg az eredményt. Ennek az az oka, hogy (5) jobb oldalának utolsó két tagja valóban majdnem kiejti egymást, de $M_\mathrm{N} \gg M_\mathrm{F}$ miatt az egyikükhöz vagy másikukhoz képest kicsiny különbségük azonos nagyságrendű a jobb oldal első tagjával.

2. A megoldásban tárgyalt három „egyensúlyi” pont öt nevezetes pont, az ún. Lagrange-pontok közé tartozik. Ezek bármelyikében a Földhöz és a Naphoz képest kicsiny tömegű test a Föld keringésével együtt forgó vonatkoztatási rendszerből nézve egyensúlyban lenne. A negyedik és az ötödik Lagrange-pont annak a két szabályos háromszögnek harmadik csúcsa, amelyek a Föld keringési síkjában vannak, és egyik oldaluk a Nap-Föld szakasz. Érdekes, hogy csak ez a két utóbbi *stabil* egyensúlyi pont, az előző három *instabil.* Ez azt jelenti, hogy a stabil egyensúlyi helyzetből kicsit kimozduló test visszatér oda, vagy az egyensúlyi pont közelében periodikus mozgást végez. Az instabil pontokból kimozduló test viszont – ha egyéb erő nem hat rá – egyre jobban eltávolodik onnan. A stabil Lagrange-pontokban ténylegesen megfigyelhető az ott összegyűlt „kozmikus törmelék”, a SOHO-nak viszont – mivel instabil Lagrange-pontban tartózkodik – állandóan korrigálni kell a pályáját, ha azt akarjuk, hogy hosszabb ideig ott maradjon.

(G. L.)