I. megoldás. A törés-törvény szerint (az *ábra* jelöléseivel)

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=n.$$

a) d maximális értéke ($d_{\max}$) mellett az AB fénysugár érintőleges, azaz $\beta=90^\circ$, így $\sin\alpha=1/n$.

b) $\sin\alpha=d_{\max}/R$, innen $n=R/d_{\max}$. A megadott n mellett $d_{\max}=3{,}55$ cm.

c) Általános esetben az OB szakasz f hossza

$$f=R\left(\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}\right)$$

A szélső estben $\beta=90^\circ$, ebből

$$f_{\min}=\frac{R}{\cos\alpha}=R\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=7{,}1\ \text{cm}.$$

Ha d tart nullához, minden szög kicsi, így $\sin\beta\approx\beta$, $\cos\beta\approx1$, $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)\approx(\beta-\alpha)$, és $\beta/\alpha\approx n$, tehát

$$f_{\max}=R\frac{n}{n-1}=17{,}1\ \text{cm}.$$

Belátható, hogy f monoton csökkenő függvénye d-nek, tehát d változtatásakor az OB szakasz hossza e két határ közötti értékeket vesz fel.

Több megoldás alapján

II. megoldás. Számítsuk ki f-et tetszőleges α esetére! Az OAB háromszögre felírhatjuk a szinusz-tételt:

$$\frac{OB}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=n,$$

(felhasználtuk a törési törvényt is), ahonnan

$$AB=\frac{f}{n}.$$

Másrészt a koszinusz-tétel szerint

$$f^2+R^2-2Rf\cos\alpha=\frac{f^2}{n^2}.$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva (és a számunkra fontos nagyobb gyököt választva) a keresett OB távolság:

$$f(\alpha)=R\frac{n^2}{n^2-1}\left(\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha-\frac{n^2-1}{n^2}}\right).$$

Ez a függvény $\cos\alpha$-nak monoton növekvő, α-nak tehát monoton csökkenő függvénye. f legkisebb értékét a legnagyobb olyan $\alpha_{\max}$ szögnél veszi fel, melyre $\sin\beta\le1$, vagyis $\sin\alpha_{\max}=1/n$-nél. Itt

$$f=f_{\min}=R\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=7{,}1\ \text{cm}.$$

f legnagyobb értékét (pontosabban felső korlátját) $\alpha\to0$ határesetben kapjuk, ekkor

$$f\to f_{\max}=R\frac{n^2}{n^2-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=R\frac{n}{n-1}=17{,}1\ \text{cm}.$$

Jesch Dávid (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. o.t.) megoldása alapján

III. megoldás. Az ábra síkjában az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarak az üveg határfelületén éppen úgy törnek meg, mint ahogy egy planparalel lemezen, majd egy síkdomború vékony lencsén való áthaladásukkor tennék. A planparalel lemez nem változtatja meg a sugarak irányát, a lencse viszont fókuszálja, az optikai tengelynek a lencsétől $R/(n-1)$ távolságban levő pontjára képezi le azokat. Ha ehhez a távolsághoz hozzáadjuk a henger sugarát, megkapjuk az OB távolságot a vizsgált határesetben.

(G. P.)

Megjegyzés. Sok megoldó úgy vélte, hogy az OB távolságnak nincs felső határa, vagyis hogy a tengelyhez közel érkező fénysugarak tetszőlegesen távoli pontban metszhetik az optikai tengelyt. A részletes számításokból az látszik, hogy ez téves „megérzés” volt.