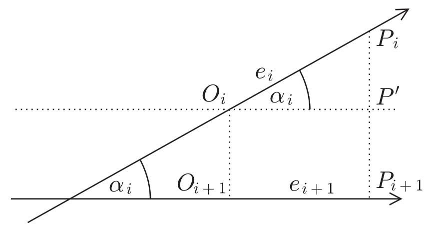
I. megoldás. Vegyünk fel minden egyenesen egy adott irányítást, és vegyünk az e_1 egyenesen egy O_1 pontot. Ennek vetülete az e_2-n O_2, az O_2-é e_3-on O_3, ..., O_{n-1}-é az e_n-en O_n. Legyen végül az O_n merőleges vetülete az e_1 egyenesen O'. Az O_1O' irányított távolságot jelölje p.



Legyen az irányított O_1P_1 távolság d, legyen e_i és e_{i+1} közötti szög α_i. (α_n az e_n és az e_1 szöge; a szögeket a skaláris szorzatnál szokott módon, tehát az azonosan irányított szárak között mérjük, így az értékük 0°-tól 180°-ig terjedhet.)

Ismert (de az ábráról is leolvasható), hogy minden $i < n$-re

$$O_{i+1}P_{i+1} = \cos\alpha_i \cdot O_iP_i,$$

ahol a szakaszhosszak az egyeneseiknek megfelelően irányítottan értendők. Az utolsó lépésre ez annyiban módosul, hogy

$$O_1P_{n+1} = p + O'P_{n+1} = p + \cos\alpha_n \cdot O_nP_n.$$

Tehát végül $O_1P_{n+1} = p + d \cdot \prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i$. Pontosan akkor felel meg a P_1 pont, ha az előbbi kifejezés d-vel egyezik. Ilyen d mindig van: ha a $q = \prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i$ mennyiség 1, akkor minden koszinusz egységnyi (különben a szorzat abszolút értéke nem érné el az 1-et), azaz minden egyenes párhuzamos (azonos vagy ellentétes irányítással); ekkor látható, hogy minden pont jó lesz az e_1 egyenesen (a P_i pontok egy, az e_i egyenesekre merőleges egyenesen vannak.)

Ha viszont q nem 1, akkor pontosan egy jó P_1 pont, azaz d távolság van:

$$d = p + qd, \qquad d = \frac{p}{1-q}.$$

Ennél a d értéknél $P_1 = P_{n+1}$.

Rácz Béla András (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Tekintsük azokat a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ körüljárástartó hasonlósági transzformációkat, amelyek egy adott P_1 pontot P_2-be, P_2-t P_3-ba, és így tovább, P_i-t P_{i+1}-be, végül P_n-t P_{n+1}-be viszik. A P_{i+1} pont a P_i pontból e_{i+1}-re állított merőleges talppontja, azaz tulajdonképpen P_i merőleges vetülete e_{i+1}-re. Ez azt jelenti, hogy a T_i transzformációk megadhatók a P_1 kiválasztásától függetlenül is: például, ha a T_i transzformáció az e_i egyenes merőleges vetítése az e_{i+1} egyenesre. Ez valóban körüljárástartó hasonlósági transzformáció, mert ha a két egyenes szöge α_i, akkor az e_i egyenesen egy α_i szögű, $\cos\alpha_i$ arányú forgatva nyújtással ekvivalens. A $T_1, T_2, \ldots, T_n$ transzformációkat egymás után végrehajtva a P_1 pontból a P_{n+1} pontot, az e_1 egyenesből e_{n+1} egyenest kapjuk. A feladat állítása ekvivalens azzal, hogy a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ transzformációk összetételével kapott T nyilvánvalóan szintén kürüljárástartó és hasonlósági (szakaszaránytartó) transzformációnak (a T_i transzformációk szorzatának) van legalább egy fix pontja az e_1 egyenesen. Tudjuk (például Reiman István: *Geometria és határterületei,* 1999. 7.5. része alapján), hogy egy körüljárástartó hasonlóság csak eltolás vagy forgatva nyújtás lehet. Az e_1 egyenes képe T-re önmaga, ebből következik, hogy ha T forgatva nyújtás, akkor a forgatási szög 180° többszöröse, azaz T tulajdonképpen egy középpontos hasonlóság, és vagy e_1-en van a középpontja, ami fix pont, vagy a hasonlóság aránya 1, ekkor azonban T az identitás és e_1 minden pontja megfelel a feladat feltételeinek. Ha T nem forgatva nyújtás, akkor eltolás, vagyis egy egybevágóság. T-ről tudjuk, hogy hasonlósági aránya, mivel a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ hasonlóságok szorzataként kaptuk,

$$\lambda = \prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i.$$

Tehát (mivel minden i-re $-1 \le \cos\alpha_i \le 1$) T pontosan akkor egybevágóság, ha $\lambda = 1$, azaz T csak akkor lehet eltolás, ha minden i-re $\cos\alpha_i = \pm 1$, azaz az e_i egyenesek párhuzamosak. Ebben az esetben azonban nyilvánvaló, hogy a T transzformáció az identitás, és az e_1 egyenes minden pontja megfelel a feladat feltételeinek.

Puskás Anna (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Gyarmati Ákos (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 9. évf.) a KöMaL 1987/12. számában megtalálta a feladat kitűzését **F. 2666.** sorszámmal, a megoldásait pedig az 1988/5. szám 205–207. oldalán.