I. megoldás. Helyettesítsünk (1)-ben x helyére $(x-1)$-et:

$$f(x)+f(x-2)=\sqrt{2}\cdot f(x-1). \tag{2}$$

Helyettesítsünk (1)-ben x helyére $(x+1)$-et:

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}\cdot f(x+1). \tag{3}$$

Adjuk össze (2)-t és (3)-at:

$$2f(x)+f(x-2)+f(x+2)=\sqrt{2}\cdot\big[f(x-1)+f(x+1)\big],$$

ami (1) alapján

$$2f(x)+f(x-2)+f(x+2)=2\cdot f(x)$$

alakban írható. Vagyis

$$f(x-2)+f(x+2)=0,\quad f(x+2)=-f(x-2).$$

Helyettesítsünk x helyére $(x+2)$-t:

$$f(x+4)=-f(x).$$

Helyettesítsünk x helyére $(x+4)$-et:

$$f(x+8)=-f(x+4)=f(x).$$

Tehát az f függvény valóban periodikus.

Eckert Bernadett (Bonyhád, Petőfi S. Evangélikus Gimn. 9. évf.)

II. megoldás. Írjuk át (1)-et a következő alakba:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}f(x+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}f(x-1). \tag{2}$$

A további $f(x+a)$ értékeket $f(x+1)$ és $f(x-1)$ segítségével fogjuk kifejezni.

(1)-ben x helyére írjunk $(x+1)$-et:

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}\cdot f(x+1).$$

(2)-t behelyettesítve:

$$f(x+2)+\frac{\sqrt{2}}{2}f(x+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}f(x-1)=\sqrt{2}\cdot f(x+1),$$
$$f(x+2)=\frac{\sqrt{2}}{2}f(x+1)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x-1).$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x+2)$-t, ekkor az imént kapott formula szerint

$$f(x+3)+f(x+1)=\sqrt{2}\cdot f(x+2)=f(x+1)-f(x-1),$$

vagyis

$$f(x+3)=-f(x-1).$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x+3)$-at:

$$f(x+4)+f(x+2)=\sqrt{2}\cdot f(x+3).$$

Az eddigiek felhasználásával ezt így írhatjuk:

$$f(x+4)+\frac{\sqrt{2}}{2}f(x+1)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x-1)=-\sqrt{2}\cdot f(x-1),$$
$$f(x+4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x+1).$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x+4)$-et:

$$f(x+5)+f(x+3)=\sqrt{2}\cdot f(x+4).$$

Az eddigiek felhasználásával:

$$f(x+5)-f(x-1)=-f(x-1)-f(x+1),$$
$$f(x+5)=-f(x+1).$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x+5)$-öt:

$$f(x+6)+f(x+4)=\sqrt{2}\cdot f(x+5).$$

Az eddigiek felhasználásával:

$$\begin{aligned}
f(x+6)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x+1)&=-\sqrt{2}\cdot f(x+1),\\
f(x+6)&=\frac{\sqrt{2}}{2}f(x-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x+1).
\end{aligned}$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x+6)$-ot:

$$f(x+7)+f(x+5)=\sqrt{2}\cdot f(x+6).$$

Az eddigiek felhasználásával:

$$\begin{aligned}
f(x+7)-f(x+1)&=f(x-1)-f(x+1),\\
f(x+7)&=f(x-1).
\end{aligned}$$

Helyettesítsünk itt x helyére $(x+1)$-et:

$$f(x+8)=f(x).$$

Az f függvény tehát valóban periodikus.

Gyarmati Ákos (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 9. évf.)