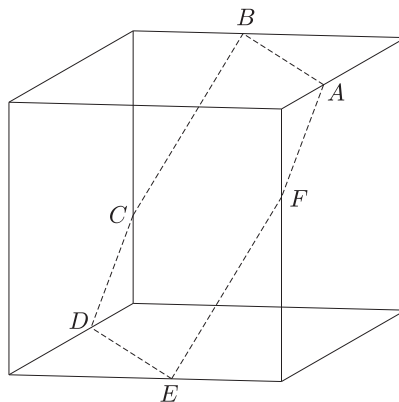
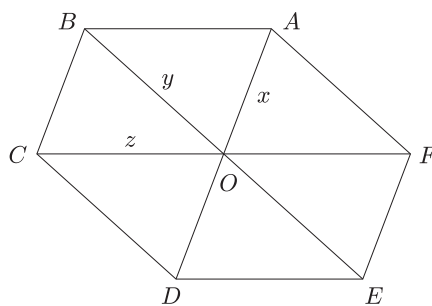


A hatszög különböző oldalainak a kocka különböző lapjain kell lenniük, szemközti oldalaknak szemközti lapokon. Ha két párhuzamos síkot elmetszünk egy harmadikkal, akkor a keletkező két metszévonal is párhuzamos. Mivel a kocka szemközti lapsíkjai párhuzamosak, azért az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalai is párhuzamosak (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Legyen a hatszög átlóinak metszéspontja O , az oldalak hossza a 2. ábrán látható módon a, b, c, d, e és f , továbbá legyen $OA = x$, $OB = y$ és $OC = z$. Mivel $AB \parallel DE$, a párhuzamos szelők tételéből következik, hogy

$$OD = d \cdot \frac{x}{a} \quad \text{és} \quad OE = d \cdot \frac{y}{a}.$$

Ugyanígy kapjuk EF és BC párhuzamosságát felhasználva, hogy

$$OE = e \cdot \frac{y}{b} \quad \text{és} \quad OF = e \cdot \frac{z}{b},$$

FA és CD párhuzamosságából pedig, hogy

$$OF = f \cdot \frac{z}{c} \quad \text{és} \quad OD = c \cdot \frac{x}{f}.$$

Összeszorozva az első, illetve a második oszlopban lévő egyenlőségeket

$$d \cdot \frac{x}{a} \cdot e \cdot \frac{y}{b} \cdot f \cdot \frac{z}{c} = OD \cdot OE \cdot OF = d \cdot \frac{y}{a} \cdot e \cdot \frac{z}{b} \cdot c \cdot \frac{x}{f}$$

adódik, amiből egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\frac{f}{c} = \frac{c}{f},$$

tehát $f = c$. Hasonlóan kapjuk, hogy $e = b$ és $d = a$. Ez azt jelenti, hogy a hatszög középpontosan szimmetrikus, a középpontja O .

Megmutatjuk, hogy O egyúttal a kocka középpontja is. Tükrözzük a kocka AB egyenest tartalmazó S lapsíkját O -ra. A tükörkép az az S' sík lesz, amely párhuzamos S -sel, és átmegy AB tükörképén, azaz a DE egyenesen. Ez a sík tehát éppen a kocka S -sel párhuzamos lapsíkja. Ebből következik, hogy O egyenlő távolságra van a kocka AB -t, illetve DE -t tartalmazó párhuzamos lapjaitól. Ugyanígy kapjuk, hogy O a kocka másik két pár párhuzamos lapjától is egyenlő távolságra van, tehát valóban a kocka középpontja.

A hatszög síkja tehát áthalad a kocka középpontján, és ez a pont egyúttal a hatszögnek is szimmetriacentruma.