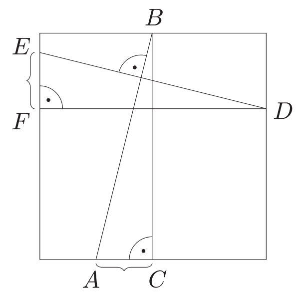
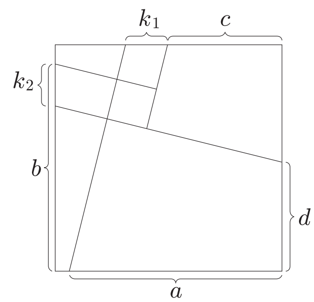
Ha egy négyzet szemközti oldalain lévő A és B, illetve D és E pontokat összekötő szakaszok merőlegesek egymásra, akkor az *1. ábrán* látható ABC és DEF háromszögek egybevágóak, mert megfelelő szögeik páronként megegyeznek, és $BC = DF$, hiszen mindkettő megegyezik a négyzet oldalával. Ezért $AB = DE$ és $AC = EF$ is teljesül. Ez utóbbi egyenlőségből következik, hogy ha a feladatunkban szereplő lyukas négyzet oldalain lévő szakaszok hosszát a *2. ábrán* látható módon jelöljük, akkor $a - (c + k_1) = (b - k_2) - d$. Viszont $k_1 = k_2$ következik abból, hogy a lyuk is négyzet, ezért

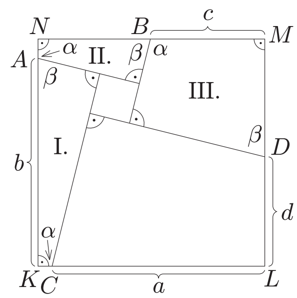
(1) $$a - c = b - d.$$



1. ábra

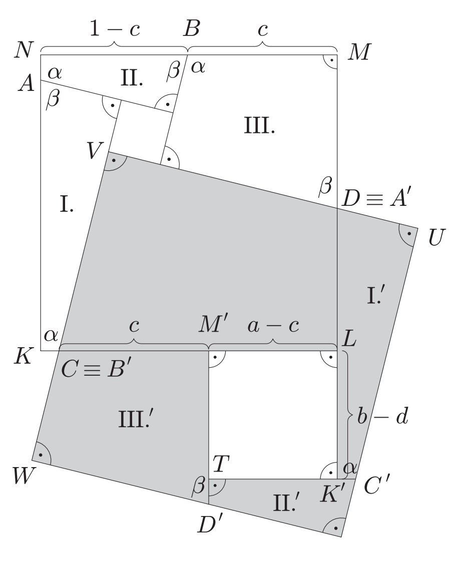


2. ábra



3. ábra

Ezt az összefüggést használjuk majd fel annak bizonyítására, hogy a feladatban szereplő négy négyszögből másképp is összeállítható egy lyukas négyzet. Válasszuk az eredeti négyzet oldalát 1 hosszúságúnak és használjuk a szakaszhosszakra, pontokra, szögekre és négyszögekre a *3. ábra* jelöléseit. Az ábrán megjelölt α, β szögek összege nyilván $180°$.



4. ábra

Toljuk el az I. négyszöget úgy, hogy A csúcsa D-be kerüljön, a III. négyszöget pedig úgy, hogy B csúcsa B-be kerüljön. Az eltolás során a pontok képét vesszővel jelöljük (*4. ábra*). Ekkor

$$LK' = DK' - DL = A'K' - DL = AK - DL = b - d,$$

továbbá

$$M'L = CL - CM' = CL - B'M' = CL - BM = a - c.$$

Vagyis (1)-et felhasználva kapjuk, hogy LK' és $M'L$ egyenlő hosszú és egymásra merőleges szakaszok. Ezért az M', L, K' ponthármashoz egyértelműen létezik az a T pont, melyre az $M'LK'T$ négyszög négyzet. Sőt, az is igaz, hogy T rajta van az $M'D'$ egyenesen, mert ez az egyenes merőleges $M'L$-re.

Megmutatjuk, hogy a II. négyszög eltolható úgy, hogy A képe D', N képe T, B képe pedig C' legyen. Mivel

$$TK' = M'L = a - c,$$

azért

$$TC' = TK' + K'C' = (a - c) + (1 - a) = 1 - c = NB,$$

az $M'T = LK' = b - d$ összefüggésből pedig következik, hogy

$$TD' = M'D' - M'T = (1 - d) - (b - d) = 1 - b = NA.$$

Végül pedig felhasználva, hogy az I$'$. négyszög C'-nél lévő szöge α, a III$'$. négyszög D'-nél lévő szöge pedig β, következik, hogy a II. négyszög eltolható a kívánt módon.

Tehát a négy négyszögből a *4. ábrán* látható módon is összeállítható egy négyzet alakú lyukat is tartalmazó négyszög. E nagy négyszög is négyzet, mert az eltolásokból következően minden szöge derékszög, továbbá $UV = VW$ is következik az eltolásokból, valamint az *1. ábrán* bizonyított $AB = DE$ egyenlőségből.