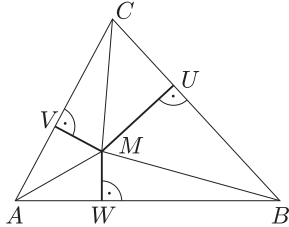


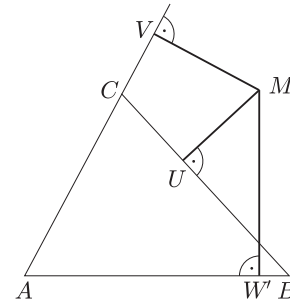
Először azt mutatjuk meg, hogy ha a merőlegesek egy ponton mennek át, akkor fennáll az (1) egyenlőség. Jelöljük a merőlegesek közös pontját M -mel. Az 1. ábrán látható AM , BM és CM átfogójú, összesen hat darab (esetleg elfajuló) derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint

$$\begin{aligned} AW^2 + MW^2 &= AM^2 = AV^2 + MV^2, \\ BU^2 + MU^2 &= BM^2 = BW^2 + MW^2, \\ CV^2 + MV^2 &= CM^2 = CU^2 + MU^2. \end{aligned}$$

A jobb-, illetve a bal oldalakat összeadva, majd mindkét oldalból kivonva $(MW^2 + MU^2 + MV^2)$ -et, éppen a bizonyítandó (1) összefüggést kapjuk.



1. ábra



2. ábra

Tegyük most fel, hogy (1) teljesül. Állítsunk U -ban merőlegest a BC , V -ben pedig a CA oldalra. Legyen M e két merőleges metszéspontja, az M -ből AB -re állított merőleges talppontját pedig jelöljük W' -vel (2. ábra). Ekkor az előzőekben bizonyítottak alapján

$$AW'^2 + BU^2 + CV^2 = AV^2 + CU^2 + BW'^2,$$

feltevésünk szerint pedig

$$AW^2 + BU^2 + CV^2 = AV^2 + CU^2 + BW^2.$$

A két egyenlőséget kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$(2) \quad AW'^2 - AW^2 = BW'^2 - BW^2.$$

Megmutatjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $W \equiv W'$. Ezt legegyszerűbben vektorok segítségével láthatjuk be. (2)-ből következik, hogy

$$\overrightarrow{AW'}^2 - \overrightarrow{AW}^2 = \overrightarrow{BW'}^2 - \overrightarrow{BW}^2,$$

azaz

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AW}^2 - \overrightarrow{BW}^2 &= \overrightarrow{AW'}^2 - \overrightarrow{BW'}^2 = (\overrightarrow{AW} + \overrightarrow{WW'})^2 - (\overrightarrow{BW} + \overrightarrow{WW'})^2 = \\ &= \overrightarrow{AW}^2 - \overrightarrow{BW}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{WW'} \cdot (\overrightarrow{AW} - \overrightarrow{BW}). \end{aligned}$$

Tehát

$$\overrightarrow{WW'} \cdot (\overrightarrow{AW} - \overrightarrow{BW}) = \overrightarrow{WW'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Mivel $\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$, továbbá $\overrightarrow{WW'}$ párhuzamos az \overrightarrow{AB} -ral, a szorzat csak akkor lehet 0, ha $\overrightarrow{WW'} = \mathbf{0}$, azaz ha W' egybeesik W -vel. Ezzel az állítás második felét is bebizonyítottuk.