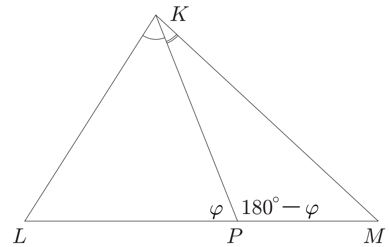
Megmutatjuk, hogy az AA_2, BB_2 és CC_2 egyenesek megegyeznek az ABC háromszög súlyvonalaival. Ebből feladatunk állítása nyilván következik.



1. ábra

Először egy lemmát igazolunk: Legyen a KLM háromszög LM oldalának tetszőleges pontja P. Ekkor

(1)
$$\frac{LP}{PM} = \frac{KL \cdot \sin PKL\sphericalangle}{KM \cdot \sin PKM\sphericalangle}.$$

Bizonyítás. A PKL háromszögben a szinusztétel szerint (*1. ábra*):

(2)
$$\frac{LP}{KL} = \frac{\sin PKL\sphericalangle}{\sin KPL\sphericalangle};$$

a PKM háromszögben pedig ugyancsak a szinusztétel szerint:

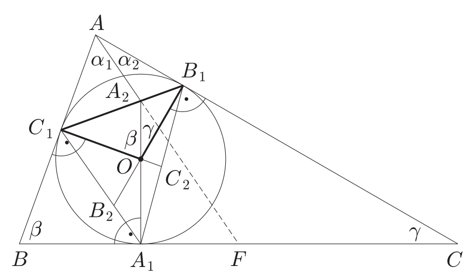
(3)
$$\frac{PM}{KM} = \frac{\sin PKM\sphericalangle}{\sin KPM\sphericalangle}.$$

A (2) egyenlőséget elosztva (3)-mal, majd rendezve (és felhasználva, hogy mivel $KPL\sphericalangle = 180° - KPM\sphericalangle$, azért $\sin KPL\sphericalangle = \sin KPM\sphericalangle$), éppen a bizonyítandó (1) összefüggést kapjuk.

Térjünk vissza eredeti feladatunkhoz. Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val, legyen $C_1AA_2\sphericalangle = \alpha_1$, $B_1AA_2\sphericalangle = \alpha_2$, az AA_2 egyenes és a BC oldal metszéspontja pedig F (*2. ábra*). Az OC_1BA_1 négyszög C_1-nél és A_1-nél lévő szögei derékszögek, ezért $C_1OA_1\sphericalangle = 180° - \beta$, vagyis $C_1OA_2\sphericalangle = \beta$. Ugyanígy kapjuk, hogy $B_1OA_2\sphericalangle = \gamma$. Alkalmazzuk lemmánkat az OB_1C_1 háromszögre és az A_2 pontra:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{OB_1 \cdot \sin\gamma}{OC_1 \cdot \sin\beta}.$$

Az AB_1C_1 háromszögre és az A_2 pontra alkalmazva a lemmát:



2. ábra

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{AB_1 \cdot \sin\alpha_2}{AC_1 \cdot \sin\alpha_1}.$$

Mivel $OB_1 = OC_1$ (mindkettő a beírt kör sugara) és $AB_1 = AC_1$ (mindkettő A-ból a beírt körhöz húzott érintőszakasz), a fenti összefüggésekből következik, hogy

(4)
$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}.$$

Írjuk fel lemmánkat most az ABC háromszögre és az F pontra:

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB \cdot \sin\alpha_1}{AC \cdot \sin\alpha_2}.$$

Ebből (4), valamint az ABC háromszögre vonatkozó szinusztétel felhasználásával

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB \cdot \sin\beta}{AC \cdot \sin\gamma} = 1$$

következik, azaz F valóban felezi a BC oldalt. Ugyanígy kapjuk, hogy a BB_2 és a CC_2 egyenesek is súlyvonalak az ABC háromszögben.