

I. megoldás. A 31 prímszám, azért a „kis” Fermat-tétel szerint osztója a $10^{30} - 1$ számnak. Mivel $(10^{30})^k - 1^k$ osztható $(10^{30} - 1)$ -gyel, azért a 31 osztója az összes $10^{30k} - 1$ alakú számnak is (k tetszőleges pozitív egész). Osztója tehát ezen számok harmadrésének is, vagyis minden olyan számnak, ami $30k$ darab 3-as számjegyből áll. Egy ilyen számot 100-zal megszorozva, majd az eredményhez 31-et hozzáadva újfent 31-gyel osztható számhoz jutunk, és minden ilyen szám a megadott sorozathoz tartozik. Ezek szerint 31-től kezdve a sorozat minden 30-adik eleme osztható 31-gyel, ezek tehát a 31 kivételével valamennyien összetettek. Ezzel beláttuk, hogy a sorozatban végtelen sok összetett szám van.

Megjegyzés. A „kis” Fermat-tételt számos számelmélettel foglalkozó könyvben megtalálhatjuk, például Dr. Szalay Mihály: *Számelmélet* című tankönyvében is.

II. megoldás. Az 1, 31, 331, 3331, ... sorozatban végtelen sok olyan elem van, amelyben $16k + 8$ darab 3-as van. Tekintsük ezeket az elemeket:

$$\underbrace{333 \dots 3331}_{16k+8 \text{ db}} = \frac{\overbrace{999 \dots 9993}^{16k+8 \text{ db}}}{3} = \frac{\overbrace{999 \dots 9999}^{16k+9 \text{ db}} - 6}{3} = \frac{10^{16k+9} - 1 - 6}{3} = \frac{10^{16k+9} - 7}{3}.$$

Ha belátjuk, hogy $17 \mid 10^{16k+9} - 7$, akkor $(3; 17) = 1$ miatt $\frac{10^{16k+9} - 7}{3}$ is osztható 17-tel, azaz $17 \mid \underbrace{333 \dots 3331}_{16k+8}$ is

fennáll. Ehhez igazolni kell, hogy $10^{16k+9} \equiv 7 \pmod{17}$.

A kongruencia szabályait felhasználva:

$$\begin{aligned} 10^{16k+9} &= 10^9 \cdot (10^{16})^k = 1000^3 \cdot (10\,000^4)^k = \\ &= (58 \cdot 17 + 14)^3 \cdot ((588 \cdot 17 + 4)^4)^k \equiv 14^3 \cdot (4^4)^k = \\ &= (161 \cdot 17 + 7)(15 \cdot 17 + 1)^k \equiv 7 \cdot 1^k = 7 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Tehát $10^{16k+9} - 7 \equiv 0 \pmod{17}$, így $17 \mid \underbrace{333 \dots 3331}_{16k+8}$ minden k -ra. A sorozatnak végtelen sok eleme osztható 17-tel, ezért végtelen sok eleme összetett.

Bóka Gergely (Szolnok, Verseggy Ferenc Gimn., 11. évf.)