

Jelölje  $a$  az először kiválasztott számot és  $b$  a másodikat. A kérdés az, hogy  $u = a + b$  vagy  $v = a - b$  lesz-e több esetben osztható 3-mal. Az esetek megszámlálásához célszerű a lehetőségeket csoportosítani.

Amennyiben  $a$  és  $b$  mindegyike osztható 3-mal, akkor  $u$  és  $v$  bármelyike ugyancsak osztható 3-mal. Ha  $a$  és  $b$  közül csak az egyik osztható 3-mal, akkor  $u$  és  $v$  egyike sem lesz 3-mal osztható.

Vizsgálunk kell még azokat a lehetőségeket, amikor a két kiválasztott szám egyike sem osztható 3-mal. Ezeket is célszerű aszerint csoportosítani, hogy a számok 3-mal osztva 1-et vagy 2-t adnak-e maradékul. Ez két halmaz:  $A = \{1, 4, 7\}$  és  $B = \{2, 5, 8\}$ . Ha  $a$  és  $b$  mindegyike vagy az  $A$ , vagy a  $B$  halmazból való, akkor  $a - b$  osztható 3-mal, de  $a + b$  nem. Ez összesen  $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$  lehetőség. Amennyiben  $a$  és  $b$  egyike az  $A$  halmazból, másikuk a  $B$  halmazból való, akkor viszont  $a - b$  nem osztható 3-mal, de  $a + b$  osztható 3-mal. Ez ugyancsak  $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$  lehetőség. Az összeg és a különbség tehát ugyanannyi esetben osztható 3-mal, a két esemény valószínűsége egyenlő.

*Megjegyzés.* Tekintettel a kapott eredményre, felmerül a kérdés, hogy nem lehetne-e ezt a lehetőségek párosításával, esetszétválasztás nélkül bizonyítani. Ez valóban lehetséges.

Minden kiválasztott  $(a, b)$  párhoz rendeljük hozzá az  $(a, 9 - b)$  párt.  $9 - (9 - b) = b$  miatt ez kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés (bijekció), hiszen  $b$ -vel együtt  $9 - b$  is végigfut az adott halmazon. Mivel 9 páratlan,  $9 - b = b$  lehetetlen, ezért minden párhoz egy tőle különbözőt rendeltünk. Mármost  $a - (9 - b) = a + b - 9$  alapján a második pár különbsége pontosan akkor osztható 3-mal, ha az első pár összege osztható 3-mal, ezért valóban mindkét eset ugyanannyiszor fordul elő.

Világos, hogy ugyanezzel az eljárással bizonyítható az eredmény a 9 helyett a 3 minden páratlan többszörösére. Számos dolgozatban az összes eset felírása szerepelt (ami természetesen helyes megoldás). De 9 helyett például 999 esetén szinte lehetetlen volna. Ebben az esetben a fenti megoldás is nehezebb lenne.