I. megoldás. A vizsgált kifejezés szimmetrikus, így felírható $x+y(=1)$ és $xy=t$ polinomjaként. Valóban:

$$A(x,y)=xy^4+x^4y=xy(x^3+y^3)=xy\big[(x+y)(x^2-xy+y^2)\big].$$

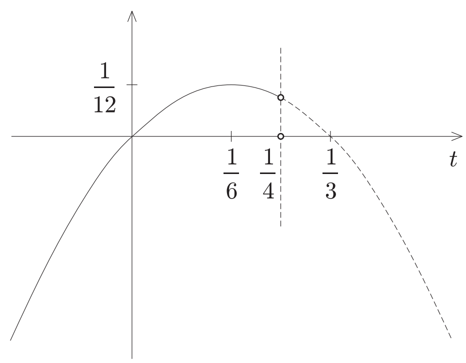
Mivel $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$, azért

$$A(x,y)=xy\big[(x+y)\big((x+y)^2-3xy\big)\big]=xy(1-3xy).$$

Ha $x+y=1$, akkor az $xy=t$ szorzat értékkészlete a $]-\infty;1/4]$ intervallum, ugyanis az

$$\left.\begin{aligned}x+y&=1\\ xy&=t\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D=1-4t$, az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha $t\le\dfrac{1}{4}$.



1. ábra

Az $x+y=1$ feltétel esetén tehát a kétváltozós $A(x,y)$ polinom értékkészlete az $I=]-\infty;1/4]$ intervallumon megegyezik az $f(t)=t(1-3t)$ függvény értékkészletével (*1. ábra*). A valós számok halmazára kiterjesztett f függvény a $t=\dfrac{1}{6}$ helyen veszi föl az abszolút maximumát és ez az érték $f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{12}$. Mivel $\dfrac{1}{6}\in I$, azért ennyi az I intervallumon értelmezett $f(t)$ függvény maximuma, tehát a szóban forgó $A(x,y)$ legnagyobb értéke is az $x+y=1$ feltétel esetén.

Pálinkás Csaba (Szolnok, Verseghy F. Gimn. 9. évf.)

Megjegyzések. 1. A megoldók többsége az xy^4+x^4y kifejezést az $x+y=1$ feltételt felhasználva $-3\left(xy-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{12}$ alakba írta. Több mint 100 dolgozatban ezek után minden további nélkül olyasmi szerepelt, hogy eszerint a keresett maximum értéke $\dfrac{1}{12}$. Ez csak akkor igaz, ha az összeg első tagja, $-3\left(xy-\dfrac{1}{6}\right)^2$ fölveszi a 0 értéket, azaz van olyan x és y, melyek összege 1, szorzatuk pedig $\dfrac{1}{6}$. A megoldásból ez kiderül, bár ott ezeket az értékeket nem számoltuk ki. Az

$$\left.\begin{aligned}x+y&=1\\ xy&=\frac{1}{6}\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásával nyomban adódnak a változóknak azok az értékei, amelyekre $A(x,y)$ maximális: $\{x,y\}=\left\{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right\}$.

2. A feladat eredménye szerint ha $x+y=1$, akkor $xy^4+x^4y\le\dfrac{1}{6}$. Ebben a formában arra a ritkább jelenségre láthatunk példát, amikor egy szimmetrikus egyenlőtlenségben nem a változók egyenlő értékeire kapjuk a maximumot.

II. megoldás. A feladatot a differenciálszámítás alkalmazásával oldjuk meg. Az eredetileg kétváltozós függvényt az $y=1-x$ helyettesítéssel egyváltozós polinommá írhatjuk:

$$f(x)=x(1-x)^4+x^4(1-x).$$

Írjuk föl a függvény deriváltját, majd a hatványozás elvégzése után rendezzük a polinomot:

$$f'(x)=(1-x)^4-4x(1-x)^3+4x^3(1-x)-x^4=-12x^3+18x^2-8x+1.$$

Az eredeti kétváltozós polinom szimmetrikus, így teljesül, hogy $f(x) = f(1-x)$. A deriváltra nézve innen $f'(x) = -f'(1-x)$ adódik, azaz $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -f'\left(\frac{1}{2}\right)$ és így $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ következik. Ennek alapján a derivált szorzattá alakítható:

$$f'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(-12x^2 + 12x - 2).$$

A másodfokú tényezőnek két valós gyöke van, $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ és $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. Jegyezzük meg, hogy $x_1 + x_2 = 1$ miatt $f(x_1) = f(x_2)$.

Mivel a harmadfokú $f'(x)$-nek három különböző valós gyöke van és a főegyütthatója negatív, a grafikonja fölvázolható: (*2. ábra*). A grafikonról leolvasható a derivált előjele, és így az is, hogy f-nek két lokális maximuma van: x_1-ben és x_2-ben. Azt már láttuk, hogy ezek a maximumok egyenlők és mivel f szigorúan monoton növő, ha $x < x_1$ és szigorúan monoton fogyó, ha $x > x_2$, azért ez a közös érték, $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{12}$ a függvény abszolút maximuma.

2. ábra

2. ábra

3. ábra

3. ábra

Szilágyi Péter (Debrecen, Kossuth L. Gyak. Gimn. 10. évf.)

Megjegyzés. A fenti vizsgálatból az is kiderül, hogy f-nek lokális minimuma van, ha $x=\frac{1}{2}$; ennek értéke $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$. Az f függvény grafikonja a *3. ábrán* látható.