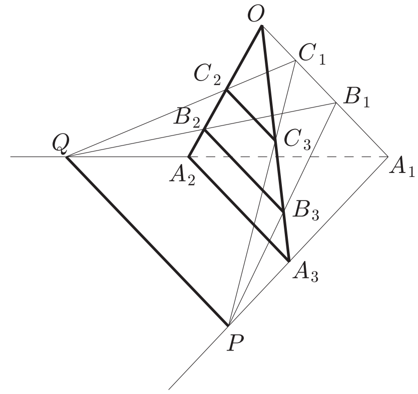
Legyen P az A_1A_3, B_1B_3 és C_1C_3 egyenesek, Q pedig az A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek közös pontja (lásd az *ábrát*). Vizsgáljuk meg a PQ egyenes és az $\mathcal{S} = OA_2A_3$ sík kölcsönös helyzetét. PQ nincs benne $\mathcal{S}$-ben, mert ellenkező esetben az $A_1 = PA_3 \cap QA_2$ pont is $\mathcal{S}$-beli volna, azaz $OA_1A_2A_3$ nem lenne tetraéder.



Tegyük fel, hogy PQ az M pontban döfi $\mathcal{S}$-et. Ekkor M benne van az $\mathcal{S}_A = A_1PQ$, az $\mathcal{S}_B = B_1PQ$ és az $\mathcal{S}_C = C_1PQ$ síkokban is. Ezért M rajta van az $\mathcal{S}$ és az $\mathcal{S}_A$ síkok metszésvonalán, vagyis az A_2A_3 egyenesen. Ugyanígy M rajta van az $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_B = B_2B_3$ és az $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_C = C_2C_3$ egyeneseken is. Ekkor pedig az A_2A_3, B_2B_3 és C_2C_3 egyenesek valóban egy ponton – M-en – mennek át.

Tegyük most fel, hogy PQ párhuzamos az $\mathcal{S}$ síkkal. Ekkor PQ-nak és az $\mathcal{S}$-beli A_2A_3 egyenesnek nem lehet közös pontja. De PQ és A_2A_3 benne vannak az $\mathcal{S}_A$ síkban, ezért ha nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak. Ugyanígy láthatjuk be – az $\mathcal{S}_B$, illetve az $\mathcal{S}_C$ síkok segítségével –, hogy B_2B_3 és C_2C_3 is párhuzamos PQ-val. Ez viszont azt jelenti, hogy az A_2A_3, B_2B_3 és C_2C_3 egyenesek egymással is párhuzamosak.

Mivel más eset nincs, a feladat állítását beláttuk.

Barabás László (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ismert, hogy ***ha három sík páronként egy-egy egyenesben metszi egymást, akkor a három metszésvonal vagy egy ponton megy át, vagy párhuzamos*** (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* kötet, 1703–04. feladatok). Megoldásunk gondolatmenete lényegében megegyezik ennek az állításnak a bizonyításával.