I. megoldás. Minden valós szám az egész és a törtrészének az összege; alkalmazzuk ezt $2^k\sqrt{2}$-re, ahol k tetszőleges pozitív egész.

$$2^k\sqrt{2} = \left[2^k\sqrt{2}\,\right] + \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\}.$$

Szorozzuk ezt az egyenlőséget $\sqrt{2}$-vel:

$$2^{k+1} = \left[2^k\sqrt{2}\,\right]\sqrt{2} + \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\}\sqrt{2}.$$

Ha $n = \left[2^k\sqrt{2}\,\right] + 1$, akkor a fenti egyenlőség a következő alakba írható:

$$2^{k+1} = n\sqrt{2} - \left(1 - \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\}\right)\sqrt{2}.$$

Mivel $\sqrt{2}$ irracionális szám, azért $2^k\sqrt{2}$ nem lehet egész. Így $0 < \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\} < 1$, tehát a fenti egyenlőségből kapjuk, hogy

$$0 < n\sqrt{2} - 2^{k+1} = \left(1 - \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\}\right)\sqrt{2}.$$

Ebből következik, hogy valahányszor a fenti különbség kisebb 1-nél, azaz

$$0 < n\sqrt{2} - 2^{k+1} < 1,$$

akkor az egész rész definíciója alapján $\left[n\sqrt{2}\,\right] = 2^{k+1}$.

Megmutatjuk, hogy az ennél erősebb

$$\left(1 - \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\}\right)\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenség is végtelen sok k-ra teljesül. $\sqrt{2}$-vel osztva és rendezve azt kell igazolnunk, hogy végtelen sok k-ra

(1) $$\frac{1}{2} < \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\}.$$

Először is jegyezzük meg, hogy $\sqrt{2}$ irracionális voltából következik, hogy egyenlőség nem teljesülhet (1)-ben. Vegyük észre továbbá, hogy ha egy adott m-re $0 < \alpha = \left\{2^m\sqrt{2}\,\right\} < \frac{1}{2}$, akkor $0 < \left\{2^{m+1}\sqrt{2}\,\right\} = 2\alpha$. $\frac{1}{2}$-nél kisebb törtrész esetén tehát a 2-hatvány tényező kitevőjét 1-gyel növelve a törtrész duplázódik, így pedig előbb vagy utóbb $\frac{1}{2}$ és 1 közé esik majd. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges k-ra vagy $\frac{1}{2} < \left\{2^k\sqrt{2}\,\right\}$, vagy pedig van olyan, a k-nál nagyobb m kitevő, amelyre teljesül (1). Valóban végtelen sok olyan kitevő létezik tehát, amelyre teljesül (1) és ezt akartuk bizonyítani.

Sándor Nóra Katalin (Pápai Református Kollégium Gimnáziuma, 11. évf.)

II. megoldás. Könnyen látható, hogy minden x valós szám felírható, mégpedig egyértelműen $n\sqrt{2} + r$ alakban, ahol n pozitív egész és r, a „maradék” kisebb $\sqrt{2}$-nél, pontosabban $0 \le r < \sqrt{2}$. Az is látható, hogy ha x egész és a maradék nagyobb, mint $\sqrt{2} - 1$, akkor $x = \left[\sqrt{2}(n+1)\right]$, ugyanis ekkor $0 \le \sqrt{2}(n+1) - x < 1$.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, tehát csak véges sok 2-hatvány írható $\left[\sqrt{2}\,n\right]$ alakban. Ekkor létezik olyan m kitevő, amin túl nincs a megadott alakú 2-hatvány. A fentiek értelmében osszuk el maradékosan az m-nél nagyobb kitevőjű 2-hatványokat $\sqrt{2}$-vel.

(2) $$2^{m+k} = n_k\sqrt{2} + r_k.$$

Mivel $\sqrt{2}$ irracionális, azért $0 < r_k$, indirekt föltevésünk szerint pedig $r_k \le \sqrt{2} - 1$. A (2) egyenlőséget 2-vel szorozva

$$2^{m+k+1} = 2n_k\sqrt{2} + 2r_k.$$

Az $r_k \le \sqrt{2} - 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$0 < 2r_k \le 2\sqrt{2} - 2 < \sqrt{2},$$

ami a fenti „maradékos osztás” egyértelműsége miatt azt jelenti, hogy $r_{k+1} = 2r_k$. Ez pedig ellentmondás, hiszen $0 < r_k = 2^{k-1}r_1 \le \sqrt{2} - 1$ nem teljesülhet minden pozitív egész k-ra.

Rácz Béla András (Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.)