I. megoldás.

a) Csak az olyan számok között érdemes keresni, amelyekben 9-cel osztható számú egyes van, hiszen csak ezek oszthatók 9-cel. Legyen a számjegyek száma $9n$. Ekkor a szám szorzattá alakítható:

$$\underbrace{111\ldots 11}_{9n} = 10^{9n-1} + 10^{9n-2} + \cdots + 10 + 1 =$$
$$= 111\,111\,111 \cdot \left(10^{9(n-1)} + 10^{9(n-2)} + \cdots + 10^{9} + 1\right).$$

Az első tényező szorzattá bomlik; a kilenc darab egyesből álló $111\,111\,111 = 111 \cdot 1\,001\,001$. Itt mindkét tényező osztható 3-mal, de 9-cel egyikük sem, a $9n$-jegyű szám tehát pontosan akkor osztható 81-gyel, ha a 10-hatványok összegéből álló második tényező osztható 9-cel. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha 9-cel osztható számú 10-hatvány szerepel az összegben. A legkisebb n, amelyre ez igaz, a 9, tehát a 81 csupa egyesből álló legkisebb többszöröse a 81 darab egyesből álló szám.

b) Ismét olyan számok között keresünk megfelelőt, amelyekben az 1-esek száma osztható 9-cel. A legkisebb szóbajövő számoknak tíz jegye van, egyikük 0. Minden ilyen szám megkapható úgy, hogy a tíz egyesből álló számból kivonunk egy nála kisebb 10-hatványt. Vizsgáljuk meg a 10-hatványok maradékát 81-gyel osztva a 0-tól a 9-es kitevőig.

kitevő	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
maradék	1	10	19	28	37	46	55	64	73	1

A tíz egyesből álló szám 81-es maradéka ezek összege: $334 = 4 \cdot 81 + 10$. A felsorolt 10-hatványok között van olyan, mégpedig pontosan egy, amelynek ugyanennyi a 81-es maradéka: ez a 10. Ezt elhagyva $1\,111\,111\,101$ adódik: ez a szám osztható 81-gyel, a többi legfeljebb tízjegyű egyesekből és nullákból álló szám pedig nem.

A vizsgált számok közül tehát a tízjegyű $1\,111\,111\,101$ a legkisebb.

Rácz Béla András (Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 10 o.t.)

II. megoldás. Először határozzuk meg a 10 hatványainak a maradékát 81-gyel osztva. Ha U_n jelöli az n darab egyessel felírt számot, akkor egyrészt $9U_n = 10^n - 1$, másrészt U_n jegyeinek az öszege n. Ismeretes, hogy egy tizes számrendszerben felírt szám ugyanazt a maradékot adja 9-cel osztva, mint a számjegyeinek az összege: $U_n \equiv n \pmod 9$. Ezt a kongruenciát – a modulussal együtt – 9-cel szorozva kapjuk, hogy $9U_n \equiv 9n \pmod{81}$, ahonnan

$$10^n \equiv 9n + 1 \pmod{81}. \tag{1}$$

Térjünk most rá a megoldásra. A fentiek szerint

a)

$$U_n = 10^0 + 10^1 + \cdots + 10^{n-1} \equiv 9 \cdot \big(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) + n =$$
$$= \frac{n\big(9(n-1)+2\big)}{2} \pmod{81}.$$

Mivel $(2, 81) = 1$, azért $81 \mid U_n$ pontosan akkor teljesül, ha $81 \mid n\big(9(n-1)+2\big)$. A szorzat második tényezője nem osztható 3-mal, így maga a szorzat pontosan akkor osztható 81-gyel, ha az első tényező, n a 81 többszöröse. A legkisebb ilyen n a 81, így a keresett szám a 81 darab egyessel felírt szám.

b) A keresett szám osztható 9-cel, így a számjegyek összege is, tehát legalább 9 egyesből áll.

A fentiek szerint $U_{10} \equiv \dfrac{10 \cdot (9 \cdot 9 + 2)}{2} = 415 \equiv 10 \pmod{81}$, ezért olyan 10-hatványt keresünk, amelyik 10 maradékot ad 81-gyel osztva. (1) szerint ez akkor teljesül, ha

$$10^k \equiv 9k + 1 \equiv 10 \pmod{81},$$

azaz

$$9k \equiv 9 \pmod{81}.$$

A talált kongruenciát a modulussal együtt 9-cel végigosztva

$$k \equiv 1 \pmod 9,$$

azaz $k = 1$. Ez pedig azt jelenti, hogy $U_{10} - 10 = \underbrace{111\ldots 11}_{10} - 10 = 1\,111\,111\,101$ osztható 81-gyel, ennél kisebb adott alakú szám pedig nem.

III. megoldás. A feladat *a*) részére.

A binomiális tétel szerint $10^9 = (9+1)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \cdot 9^k$. Vegyük észre, hogy ebben a kifejtésben csak az első két tag nem osztható 9^3-nal: $9^3 \Big| \binom{9}{2} \cdot 9^2$, ha pedig $k \geq 3$, akkor 9^k osztható 9^3-nal. Eszerint $10^9 \equiv 1 + 9^2 \pmod{9^3}$. Ismét a binomiális tétel szerint

$$10^{9n} \equiv \left(1+9^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 9^{2k} \pmod{9^3}.$$

Ha $k \geq 2$, akkor a fenti kifejtés tagjai oszthatók 9^3-nal, így

$$10^{9n} \equiv 1 + 81n \pmod{9^3}.$$

Innen $U_{9n} = \dfrac{10^{9n}-1}{9} \equiv 9n \pmod{9^2}$, azaz $U_{9n} \equiv 9n \pmod{81}$. Innen nyomban adódik, hogy U_{9n} pontosan akkor osztható 81-gyel, ha $9n$, tehát ha n osztható 9-cel.

Megjegyzések 1.) A második megoldásban felhasznált $10^n \equiv 1 + 9n \pmod{81}$ kongruencia is megkapható a binomiális tétel felhasználásával.

2.) Az n-re vonatkozó teljes indukcióval igazolható, hogy 9^n legkisebb olyan többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak az 1 számjegyet tartalmazza a 9^n jegyű U_{9^n}, pontosabban hogy $9^n \mid U_k$ akkor és csak akkor teljesül, ha $9^n \mid k$. Ez azt jelenti, hogy a „csupaegy" számok körében korlátlanul kiterjeszthető a 9-cel való oszthatóság szabálya: egy ilyen szám pontosan akkor osztható egy 9-hatvánnyal, ha a jegyeinek az összege ilyen. Ha pedig a jegyek száma egy 9-hatvány többszöröse, akkor még az a szabály is érvényben marad, hogy egy ilyen szám ugyanazt a maradékot adja egy megfelelő 9-hatvánnyal osztva, mint a jegyeinek az összege: a k-ra vonatkozó teljes indukcióval adódik, hogy

$$U_{m \cdot 9^k} \equiv 9^k \cdot U_m \equiv m \cdot 9^k \pmod{9^{k+1}}.$$