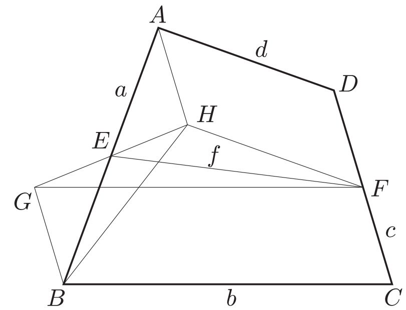
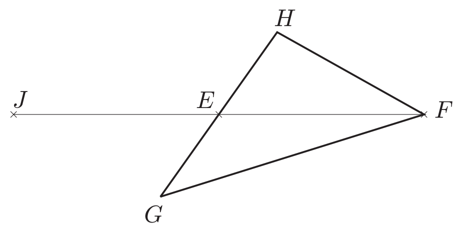
Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a négyszög csúcsait az *1. ábrán* látható módon A, B, C, D-vel, az AB oldal felezőpontja legyen E, az CD oldalé pedig F. Legyen C-nek a BF szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe G, D-nek az AF szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe pedig H. Ekkor a $BCFG$ és az $ADFH$ négyszögek paralelogrammák. Ezért BG párhuzamos és egyenlő CF-fel, AH pedig párhuzamos és egyenlő DF-fel. Viszont F a CD szakasz felezőpontja, tehát BG párhuzamos és egyenlő AH-val, azaz a $BGAH$ négyszög is paralelogramma. Ezért AB átlójának E felezőpontja a GH átlóját is felezi. Ezek szerint a GHF háromszögben FE súlyvonal.



1. ábra

A GHF háromszögben az $FE = f$ súlyvonalon kívül két oldalt is ismerünk, mert $GF = BC = b$ és $HF = AD = d$. Ezekből az adatokból a GHF háromszög egyszerűen megszerkeszthető:



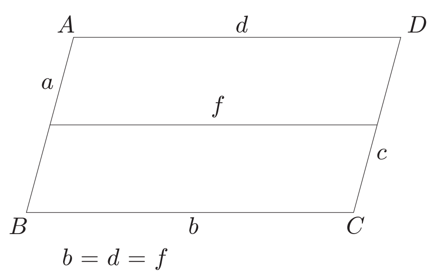
2. ábra

Vegyük fel az $FJ = 2f$ szakaszt, jelöljük ki ennek E felezőpontját, majd szerkesszük meg a J középpontú, d sugarú és az F középpontú, b sugarú körök G metszéspontját (*2. ábra*). Tükrözzük végül G-t E-re, a tükörkép legyen H. Az így szerkesztett GHF háromszögben $FE = f$ nyilván súlyvonal, $FG = b$, továbbá HF éppen GJ E-re vonatkozó tükörképe, tehát $HF = d$.

Az E és H pontok ismeretében A-t az E középpontú, $\frac{a}{2}$ sugarú és a H középpontú, $\frac{c}{2}(= FD)$ sugarú körök metszéspontjaként kapjuk. A-t E-re tükrözve kapjuk B-t, végül G-t BF, H-t pedig AF felezőpontjára tükrözve kapjuk a négyszög C és D csúcsait.

Szerkesztésünkből következik, hogy az $ABCD$ négyszög megfelel a feltételeknek, mert $AB = 2 \cdot AE = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$, $BC = FG = b$, $AD = HF = d$, DF egyenlő FC-vel, hosszuk egyenként $\frac{c}{2}$, tehát F és E oldalfelezőpontok és $FE = f$.

Feltételként szerepelt, hogy a feladatnak van megoldása, azért $b + d \geq 2f$. Ha $b + d > 2f$, akkor a GHF háromszög, s így az $ABCD$ négyszög is lényegében egyértelműen szerkeszthető meg. Ha $b + d = 2f$, akkor $b \neq d$ esetén ugyancsak egyértelmű a szerkesztés (bár a GHF háromszög elfajuló), ha viszont $b = d = f$, akkor végtelen sok megoldás van, ekkor ugyanis az $ABCD$ négyszög paralelogramma (*3. ábra*).



3. ábra

Kovács Levente (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján