

A 8 cm^3 térfogatú téglatest élei legyenek a , b és c , ekkor

$$V = abc = 8.$$

Írjuk fel a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget a pozitív a , b , c számokra:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Innen

$$(1) \quad a + b + c \geq 6.$$

Az 1 cm-rel növelt élű téglatest térfogata $(a+1)(b+1)(c+1) = 27$. A műveletek elvégzése után az

$$(2) \quad ab + ac + bc + a + b + c = 18$$

egyenlethez jutunk.

Ezután az ab , ac , bc számokra írjuk fel, hogy

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt[3]{(abc)^2} = 4.$$

Innen $ab + ac + bc \geq 12$, és (1) szerint $a + b + c \geq 6$. Ebből (2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$18 = ab + ac + bc + a + b + c \geq 18$$

Ez csak úgy lehetséges, ha mindkét előző egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül. A számok számtani közepe pedig csak akkor egyezik meg a mértani közepükkel, ha a számok egyenlők, vagyis $a = b = c$ és $abc = 8$ miatt $a = b = c = 2$, a test kocka.

Így, ha minden egyes él hosszát újra megnöveljük 1 cm-rel, akkor a térfogat 64 cm^3 lesz.